



Югозападен Университет “Неофит Рилски”

Природо – математически факултет

Катедра “Математика”

Филип Петров Петров

**ОРГАНИЗАЦИОНЕН МОДЕЛ ЗА ПРИЛОЖЕНИЕ НА ИНТЕРАКТИВНИ
МЕТОДИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА**

ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД

**за присъждане на образователната и научна степен „доктор”
в област на висше образование: 1. Педагогически науки
професионално направление: 1.3. Педагогика на обучението по...,
докторска програма: Методика на обучението по математика**

Научни ръководители:

**проф. д-р. Илия Димитров Гюдженев
доц. д-р Даниела Иванова Дурева-Тупарова**

Благоевград, 2014

СЪДЪРЖАНИЕ

УВОД	4
ГЛАВА 1. МЕТОДИЧЕСКА ОСНОВА ЗА ОБУЧЕНИЕТО ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА.....	7
1.1. Основни дидактически принципи	7
1.1.1. Принцип на нагледност.....	8
1.1.2. Принцип на съзнателност	8
1.1.3. Принцип на активност	8
1.1.4. Принцип на достъпност	9
1.1.5. Принцип на системност и последователност	9
1.1.6. Принцип на трайно усвояване на знанията	10
1.1.7. Принцип на индивидуален подход.....	11
1.2. ПРИЛОЖЕНИЕ НА ОСНОВНИТЕ ДИДАКТИЧЕСКИ ПРИНЦИПИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА	11
1.3. СТРУКТУРА НА ЛЕКЦИИТЕ И УПРАЖНЕНИЯТА ВЪВ ВИСШИТЕ УЧИЛИЩА ОТ ГЛЕДНА ТОЧКА НА ПСИХОЛОГИЯТА	13
1.4. Някои методи за ефективно провеждане на лекции	19
1.5. Някои методи за ефективно провеждане на упражнения	25
1.6. ПСИХОЛОГИЧЕСКИ ОСОБЕНОСТИ НА СТУДЕНТИТЕ, ВЛИЯЕЩИ НА СУБЕКТ-СУБЕКТНАТА КОМУНИКАЦИЯ	33
1.6.1. Типология на личността според Карл Юнг.....	33
1.6.2. Стиллове на учене	38
1.6.3. Основни принципи за създаване на учебни материали и начините за тяхното преподаване.....	43
1.7. Някои особености на обучението по линейна алгебра.....	46
1.8. ИЗВОДИ КЪМ ГЛАВА 1	55
ГЛАВА 2. АНАЛИЗ НА СРЕДСТВА ЗА ТЕХНОЛОГИЧНО-ПОДПОМОГНАТО ОБУЧЕНИЕ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА	57
2.1. УЕБ 2.0 ОБУЧЕНИЕ	57
2.1.1. Развитие на технологиите до достигане на понятието „Уеб 2.0 обучение“	57
2.1.2. Класификация на видовете субект-субектна комуникация	59
2.1.3. Специфични проблеми на Уеб 2.0 обучението по математика.....	61
2.2. ДИАЛОГОВО-ОБУЧАВАЩИ ПРОГРАМИ.....	62
2.2.1. Основни принципи на действие	63
2.2.2. История на диалогово-обучаващите програми	65
2.2.3. Съвременно развитие на теорията на диалогово-обучаващите програми	69
2.2.4. Връзка между диалогово-обучаващите програми и средствата за управление на учебно съдържание.....	70
2.2.5. Диалогово-обучаващите програми и Уеб 2.0 обучението	71
2.3. СПЕЦИФИКИ НА ЕЛЕКТРОННОТО ОБУЧЕНИЕ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА.....	72
2.3.1. Софтуерни продукти подпомагащи обучението по линейна алгебра.....	73
2.3.2. Софтуерни продукти за програмирано обучение по линейна алгебра.....	83
2.4. ИЗВОДИ КЪМ ГЛАВА 2	86

ГЛАВА 3. ОРГАНИЗАЦИОНЕН МОДЕЛ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ И САМОПОДГОТОВКА ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ 88

3.1. ОРГАНИЗАЦИЯ НА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ И ПРОЦЕС НА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНИЯ ПРЕДМЕТ „ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА“	89
3.1.1. Подбор на практически-ориентирани задачи по линейна алгебра	93
3.1.2. Интерактивни методи за семинарни упражнения по линейна алгебра	107
3.2. ОРГАНИЗАЦИЯ НА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ И ПРОЦЕС НА САМОПОДГОТОВКА ПО УЧЕБНИЯ ПРЕДМЕТ „ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ“	110
3.3. Изводи към ГЛАВА 3	112

ГЛАВА 4. СОФТУЕРНИ КОМПОНЕНТИ ЗА ТЕХНОЛОГИЧНО ПОДПОМАГАНЕ НА ПРОЦЕСА НА САМОПОДГОТОВКА ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА ЗА РЕАЛИЗИРАНЕ НА ОРГАНИЗАЦИОННИЯ МОДЕЛ 114

4.1. ЛИТЕРАТУРЕН ОБЗОР, СВЪРЗАН С ПРОВЕЖДАНЕ НА АСИНХРОННО УЕБ 2.0 ОБУЧЕНИЕ.....	114
4.2. МОТИВИРАНЕ НА ИЗБОР НА ОСНОВЕН СОФТУЕР ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА ЕКСПЕРИМЕНТ.....	120
4.2.1. SimpleMachines – дискуссионен форум като основа за субект-субектната комуникация при процеса на самоподготовка	122
4.2.2. MathJax – технология за изобразяване на математически текст в уеб страници ..	123
4.2.3. CodeCogs Equation Editor – технология за въвеждане на математически текст.....	124
4.2.4. Организиране на форумите, групите и правата за достъп	127
4.2.5. Разработка на учебни материали за запознаване на студентите с процеса на електронно обучение.....	128
4.2.6. Усъвършенстване на теорията за автоматично оценяване при диалогово-обучаващи програми	129
4.3. РАЗРАБОТКА НА ДИАЛОГОВО-ОБУЧАВАЩИ ПРОГРАМИ ЗА ОБУЧЕНИЕ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА	136
4.3.1. Софтуер за самоподготовка по темата „матрици и операции с матрици“	136
4.3.2. Софтуер за самоподготовка по темата „квадратични форми“	137
4.3.3. Софтуер за самоподготовка по темата „Евклидови и унитарни пространства“...	139
4.4. АДАПТАЦИЯ НА ДРУГИ СОФТУЕРНИ ПРОДУКТИ ЗА ЦЕЛИТЕ НА ОБУЧЕНИЕТО ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА	140
4.5. Изводи към ГЛАВА 4	141

ГЛАВА 5. ПЛАНИРАНЕ, ПРОВЕЖДАНЕ И АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ПЕДАГОГИЧЕСКИ ЕКСПЕРИМЕНТИ..... 142

5.1. ЕКСПЕРИМЕНТ № 1: ПОМИ (КОНТРОЛНА ГРУПА) И ПОФМ (ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ГРУПА) ПРЕЗ УЧЕБНАТА 2011/2012 Г.	143
5.1.1. Сравнение на експерименталната и контролната групи	144
5.1.2. Общи бележки относно проведения експеримент	146
5.1.3. Характеристика на някои от по-изявените студенти	148
5.1.4. Изводи от експеримент №1.....	150
5.2. ЕКСПЕРИМЕНТ №2: ПОМИ 2011/2012 (КОНТРОЛНА ГРУПА) И ПОМИ+ПОФМ 2012/2013 (ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ГРУПА, СБОРНА ОТ ДВЕ СПЕЦИАЛНОСТИ).....	151
5.2.1. Сравнение на експерименталната и контролната групи	152
5.2.2. Общи бележки относно проведения експеримент	153
5.2.3. Характеристика на някои от по-изявените студенти	156
5.2.4. Статистически данни от дискуссионния форум	158
5.2.5. Изводи от експеримент №2.....	159

5.3. ЕКСПЕРИМЕНТ № 3: “ИНФОРМАТИКА” СТУДЕНТИ ОТ 2 ГР. И 3 ГР. (СБОРНА КОНТРОЛНА ГРУПА) И “ИНФОРМАТИКА” 1 ГР. (ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ГРУПА) ПРЕЗ УЧЕБНАТА 2012/2013 Г., УЧЕБЕН ПРЕДМЕТ „ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ“	160
5.3.1. Сравнение на експерименталната и контролната групи	160
5.3.2. Общи бележки относно проведения експеримент	163
5.3.3. Чуждестранни студенти	164
5.3.4. Характеристика на някои от по-изявените студенти	165
5.3.5. Статистически данни от дискусияния форум	166
5.3.6. Изводи от експеримент № 3	168
5.4. ЕКСПЕРИМЕНТ № 4: КСТ II-РА ГРУПА ПРЕЗ УЧЕБНАТА 2011/2012 Г.	168
5.4.1. Общи бележки относно проведения експеримент	168
5.4.2. Статистически данни от дискусияния форум	169
5.4.3. Изводи от експеримент №4	169
5.5. ЕКСПЕРИМЕНТ № 5: КТТ (ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ГРУПА) И “ЕЛЕКТРОНИКА” (КОНТРОЛНА ГРУПА) ПРЕЗ УЧЕБНАТА 2012/2013 Г.	170
5.5.1. Сравнение на експерименталната и контролните групи	170
5.5.2. Общи бележки относно проведения експеримент	170
5.5.3. Изводи от експеримент № 5	172
5.6. АНКЕТА	173
5.7. ОБЩИ СТАТИСТИКИ ОТ ДИСКУСИОННИЯ ФОРУМ	177
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	179
ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА	182
ПУБЛИКАЦИИ, СВЪРЗАНИ С ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД:	193
СПИСЪК С ФИГУРИ И ДИАГРАМИ	194
СПИСЪК С ТАБЛИЦИ	195
ДЕКЛАРАЦИЯ ЗА ОРИГИНАЛНОСТ:	196

УВОД

Доскоро се говореше как компютърната техника постоянно навлиза в ежедневието на хората. Днес спокойно може да се каже, че тя вече е внедрена достатъчно дълбоко в бита така, че всеки да може да има достъп до нея навсякъде, по всяко време и на разумна цена. Основни умения за работа с компютър се изискват от работниците и сътрудниците в много сфери от пазара на труда, а компютърна техника се внедрява във всякакви видове дейности, услуги и производства. Естествено този процес не подминава и образователната система. На първо място е жизнено необходимо висшите училища да осигурят ефективен начин студентите им да добият въпросните знания и умения за работа с компютър. Това, разбира се, довежда до все по-усилено изучаване на допълнителни учебни предмети от сферата на информатиката и информационните технологии – едно отделено време в учебните програми, което „изяжда“ от хорариумите на другите, вече утвърдени учебни предмети. Това, от своя страна, неминуемо води до нужда от сериозни реформи в учебните предмети – тяхното присъщо съдържание, методите на преподаване и дори мястото на тяхното преподаване трябва да бъдат оптимизирани по такъв начин, че да може студентите да усвояват знанията и да придобиват необходимите умения за по-кратко време.

Един от вече утвърдените начини за постигане на оптимизация на учебния процес при традиционните „некомпютърни“ учебни предмети се явява електронното обучение. В дисертационния труд под термина „електронно обучение“ се приема дефиницията „единство между дейностите на преподаването и ученето чрез различни електронни медии и технологии“. С помощта на съответните междупредметни връзки с новите „компютърни дисциплини“ преподавателите могат да се възползват от наличния достъп до компютърната техника, да я внедрят в учебния процес по техния учебен предмет и по този начин да ускорят самото обучение. За да може да бъде постигнато това, са нужни допълнително развитие на информационните технологии и съответно софтуерно обезпечаване. Процесът за успешно внедряване на такива софтуерни продукти засега е емпиричен и практиката показва, че се оказва бавен и тромав, но не поради липса на желание, а по-скоро поради липса на ресурси – финансови и човешки.

В дисертационния труд е направен опит за изграждане на теоретичен модел за интегриране в едно цяло на две области на електронното обучение – програмираното обучение и Уеб 2.0 обучението. Базата, на която се стъпва, са натрупан дългогодишен опит в разработката и изпитанието на т.нар. „Диалогово обучаващи програми“ (модел за програмирано обучение, който е разработен в България още през 80-те години на миналия век и непрекъснато усъвършенстван и до днес), дългогодишен опит на български университети и училища в използването на системи за управление на учебно съдържание, както и съвременни изследвания в областта на Уеб 2.0 обучението. Направен е експеримент за внедряване на създадения модел в обучението по конкретни учебни предмети в Югозападен Университет „Неофит Рилски“ (Благоевград) – Линейна алгебра и Линейна алгебра и аналитична геометрия. Отчетени са специфични проблеми, свързани с внедряването на електронно обучение в обучението по линейна алгебра, както

и проблеми, свързани с мотивацията на студентите. Получените резултати могат да се използват от учени изследователи за по-нататъшно усъвършенстване на теоретичния модел за електронно обучение, както и да бъдат направени нови, подобрени изследвания – с цел по-успешно внедряване на електронното обучение в учебния процес по математика във висшите училища. Предложен е организационен модел за провеждане на семинарни упражнения, в който се използват въпросните технологии.

При разработката на дисертационния труд са взети под внимание нормативните изисквания и препоръки за педагогическо изследване, описани в (Бижков, и др., 2007), (Бижков, и др., 2009) и (Ганчев, 2009). Според тях са дефинирани:

Обект на изследването е учебният процес по време на семинарните упражнения и самоподготовката за учебните предмети „Линейна алгебра“ и „Линейна алгебра и аналитична геометрия“.

Предмет на изследването е учебно-познавателната дейност на студентите в интерактивна образователна среда по време на семинарните упражнения и самоподготовката при изучаване на материала от учебния предмет „Линейна алгебра“ на студенти от първи курс, специалности „Педагогика на обучението по математика и информатика“, „Педагогика на обучението по физика и математика“, „Информатика“ и „Компютърни системи и технологии“ на Природо-математически факултет на Югозападен университет „Неофит Рилски“ и „Комуникационна техника и технологии“ на Технически колеж към Югозападен университет „Неофит Рилски“.

Цел на изследването е, чрез промяна в организационния модел за провеждане на семинарни упражнения по линейна алгебра и на процеса на самоподготовка, да бъде повишена мотивацията на студентите за по-активно участие в учебния процес, вследствие на което да бъде повишен и техният успех.

Задачи, които са формулирани при реализирането на поставената цел, са:

1. Чрез литературен преглед да се направи анализ на предимствата и недостатъците на Бел-Ланкастърската система на обучение във висшите училища;
2. Да се анализират основните компоненти в обучението по линейна алгебра във висшите училища и да се предложат методи за ефективно провеждане на семинарните упражнения;
3. Да се анализират и сравнят софтуерни продукти и технологии, които биха могли да бъдат използвани в процеса на обучение по Линейна алгебра, в резултат от което да се проектира система от компоненти за технологично подпомагане на процеса на самоподготовка на студентите;
4. Да се моделира и приложи организационен модел за провеждане на обучение по Линейна алгебра, в който да бъдат използвани интерактивни методи на обучение по време на семинарни упражнения и специално подбрани софтуерни продукти и технологии за подпомагане на процеса на самоподготовка;

5. Да се проведе експеримент, след който да бъдат анализирани и оценени предимствата и недостатъците на предложения организационен модел.

Работната хипотеза е, че ако в обучението по Линейна алгебра в Югозападен университет „Неофит Рилски“ се реализира разработеният организационен модел, ще бъде повишена мотивацията за учене от страна на студентите и ще бъде постигнат по-висок среден успех при оценяването чрез текущ контрол.

Научните методи, които са използвани са:

- Проучване на педагогически и методически литературни източници, свързани с предмета на изследване;
- Педагогическо наблюдение и анкетиране на студентите, включени в експерименталното обучение;
- Дидактически експеримент;
- Статистически методи за обработка на получените експериментални данни.

Основни глави на дисертационния труд са:

- Глава 1. Методическа основа за обучението по линейна алгебра
- Глава 2. Анализ на средства за технологично-подпомогнато обучение по линейна алгебра
- Глава 3. Организационен модел за провеждане на семинарни упражнения и самоподготовка по линейна алгебра и линейна алгебра и аналитична геометрия
- Глава 4. Софтуерни компоненти за технологично подпомагане на процеса на самоподготовка по линейна алгебра за реализиране на организационния модел
- Глава 5. Планиране, провеждане и анализ на резултатите от педагогически експерименти

ГЛАВА 1. МЕТОДИЧЕСКА ОСНОВА ЗА ОБУЧЕНИЕТО ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА

Когато се предлагат оптимизации с цел подобряване на даден процес, в случая процесът на обучение по линейна алгебра, е важно той да бъде разгледан в най-пълни детайли. За целите на дисертационният труд се провежда експеримент с използване на интерактивни методи, от една страна, и внедряване на софтуер за електронно обучение, от друга. Това прави експериментът зависим от множество фактори и затова е важно той да не бъде „замърсен“. Основни странични фактори могат да бъдат например допуснати грешки от страна на преподавателя при осъществяване на присъственото обучение по време на семинарните упражнения. Затова е изключително важно да бъдат разгледани и спазвани основни принципи от дидактиката, психологията и методиката на обучение. Така резултатите от експеримента ще бъдат значително по-достоверни и максимално ще бъде притъпен неизбежният субективен фактор на преподавателя.

1.1. Основни дидактически принципи

В педагогическата литература има различни тълкувания за това кои и какви са основните дидактически принципи. В (Андреев, и др., 2000) е написано, че *„принципите са не само важни изисквания към организацията на обучението (към неговите цели, съдържание, форми, методи, средства), позволяващи то да бъде построено на научна основа, но и нормативни постановки, без спазването на които неговата ефективност е немислима“*. В (Андреев, 1996) е казано, че *„дидактическите принципи са основни изходни положения за функционалната технологична организация на обучението“*.

Принципите на обучение трябва да са универсални и общовалидни за различните предмети, следователно те не са конкретни методически указания. В (Дурева, 2003) е предложено следното обобщение на различни становища за дидактическите принципи:

- *„Определят дейността на учителя и познавателната дейност на ученика;*
- *Отразяват вътрешните съществени страни на учителя и ученика;*
- *Изразяват закономерностите в обучението;*
- *Са система от основополагащи изисквания за определяне на съдържанието, организацията и методите на обучение;*
- *Определят насочеността на учебния процес и дейността на учителя в него;*
- *Са основни положения, на които се опираме при преподаване на основите на науките;*
- *Са общи положения, прилагани в обучението.“*

Както се вижда, спазването на дидактическите принципи е изключително важно за преподаването като цяло, следователно е важно те да бъдат спазвани и в обучението по линейна алгебра във висши училища в частност. В педагогическата литература са утвърдени седем основни дидактически принципа.

1.1.1. Принцип на нагледност

Чрез принципа на нагледност се обогатява и разширява сетивният опит на обучаемите. Принципът е дефиниран още в трудовете на Ян Амос Коменски. Той допринася за:

- По-лесно усвояване на абстрактни научни знания, когато те могат да бъдат подкрепени чрез визуализиране с практически примери;
- Разбирането на връзката между научни знания и практически процеси;
- По-лесно усвояване на знанията;
- По-трайно запомняне на знанията;
- Увеличаване на мотивацията за учене;
- Стимулиране на въображението.

Прилагането на принципа на нагледност може да се осъществи чрез представяне на естествени обекти, чрез схеми, чертежи, таблици, графики и диаграми, чрез подходящи словесни средства на езика (например интригуващо описание), и др.

1.1.2. Принцип на съзнателност

Осъзнаването на същината на преподаваните знания е може би най-важното за тяхното разбиране. В (Андреев, и др., 2000) е казано, че *„всички външни въздействия върху учениците се пречупват през психологическия модус на личността“*. В (Ганчев, 1998) се подчертава, че *„ученикът разбира учебния материал, когато може да го възпроизведе със свои думи“*. Същото може да бъде отбелязано и за студентите във висшите училища. Възпроизвеждането на знанията с „чужди“ думи – такива, които не са типични за речника на обучаемия и обичайното му изложение, обикновено може да се приеме като признак за „зазубрени“, а не усвоени и разбрани знания.

Спазването на принципа на съзнателност предполага достигане до високо ниво на самостоятелност, на личностна ангажираност и до творческа нагласа към учебния предмет. Преподавателите трябва да са убедени, че преподаваните от тях знания са разбрани, а не просто наизустени. Това убеждение трябва да бъде търсено както в процеса на обучение, така и при оценяването.

1.1.3. Принцип на активност

Принципът на активност има отношение към даването на по-голяма самостоятелност и свобода на мислене в процеса на ученето. Активното участие в обучението води до личностно изграждане и до чувство у обучаемия, че е направил принос към развитието на учебния процес, което, от своя страна, води до по-висока мотивация за учене. Обратно, ако принципът на активност не е спазен, обучаемите получават чувство за догматичност в учебния процес, т.е., че преподавателят не се интересува от тяхното творческо мислене.

Постигането до висока степен на активност в учебния процес довежда и до по-голяма мотивация за учене при обучаемите. Студентите започват да достигат до независимост

на мисленето, проявява се желание за самодейност, стимулира се творчеството. Именно това е пътят за постигане на една от основните цели на съвременната образователна система, а именно – стремеж към самоусъвършенстване и самообразование.

1.1.4. Принцип на достъпност

Принципът на достъпност е може би най-интуитивния за всеки преподавател и същевременно с това – един от най-често нарушаваните. В него основно се казва, че преподаваният материал и начинът на преподаването му трябва да са разбираеми за обучаемите. Преподавателите трябва да се съобразяват с възрастовите особености на обучаемите, с наличните им знания и с всякакви други условия, които влияят на учебния процес. Целта е студентите да разберат какво им се преподава и то да не изглежда прекалено сложно, т.е. „недостъпно“.

Според Леон Фестингер (Фестингер, 1999) силното мотивиране по темата “нов учебен материал” се постига чрез т.нар. “когнитивен дисонанс”. Това е създаване на потребност в обучавания субект за придобиването на нови знания чрез пораждаване на силен дискомфорт от отсъствието им. Важни за принципа на достъпност са трудовете на Лев Виготски (Виготски, 1978), в които той говори за „зона на актуалното развитие“ и „зона на близкото развитие“ на обучаемия. Потребността за добиване на нови знания би била възможна само ако мотивирането на новите знания се извършва в “зоната на близкото развитие” на субекта. Ако преподаваният материал излезе извън зоната на близкото развитие на обучаемите, принципът на достъпност няма да бъде спазен, съответно няма да бъде постигнат и когнитивен дисонанс. Така преминаването на новите знания към тяхната зона на актуално развитие, т.е. към нещата които те са научили и знаят, ще трябва да става догматично чрез принуда, а не по собствена воля на обучаемия; съответно и изхабените усилия от страна на преподавателя за постигане на добър резултат (ако такъв въобще може да бъде постигнат) ще бъдат неимоверно повече.

Спазването на принципа на достъпност предполага:

- Да се преподава нов учебен материал, като се използват за база добре усвоени знания;
- Удачно е да се започва с по-леки учебни задачи, като сложността им следва да се увеличава постепенно;
- Да се преследва постепенно увеличаване на кръгозора и избягване на „ударно“ въвеждане в непозната среда.

1.1.5. Принцип на системност и последователност

Системността на знанията се постига, когато те са подредени в логическа последователност. Основно място в постигането на системност заема доказателството. Всяко ново знание трябва да бъде доказано (да се постигне убеждение, че то е вярно) на базата на преди това усвоени и доказани знания. В (Ганчев, и др., 2002) са описани подходите за провеждане на анализ и синтез. Анализът е преход от следствието към търсенето на първоизточника, а синтез е описанието как от първоизточника се достига

до следствието. Двата метода, използвани заедно, водят до ефективно доказване. Обикновено както анализът, така и синтезът включват в себе си метода “разделяй и владей”. При него една задача се разбива на по-малки подзадачи, които са по-лесно решими от учениците. Схемата за решение на задачи по синтез е най-близка до човешките възприятия – тръгва се от условието и се градят твърдения в посоката на решението:

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_k \Rightarrow q$$

При анализиране нещата вървят в обратен ред. Там има два общопризнати метода:

а) Схема на Евклид: Целта е първоначално да се докаже, че от q следва p_k , от p_k следва p_{k-1} , ... , от p_2 следва p_1 , а от p_1 следва p т.е.

$$q \Rightarrow p_k \Rightarrow \dots \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_1 \Rightarrow p$$

От последното се получава заключението, че от $q \Rightarrow p$. За да се докаже в обратна посока, т.е. че $p \Rightarrow q$, трябва да се прави проверка, т.е. синтез. При схемата на Евклид тя е задължителна.

б) Схема на Пап: цели се получаване на директно доказателство без нужда от синтез, използвайки схемата:

$$(p_k \Rightarrow q; p_{k-1} \Rightarrow p_k; \dots ; p_1 \Rightarrow p_2; p \Rightarrow p_1) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

Вижда се, че решението на задачата тръгва в обратен ред (от търсеното към даденото) по подобие на схемата на Евклид. Разликата е, че при схемата на Пап няма нужда да се прави проверка чрез синтез в обратна посока.

Ясно е, че при изводи от типа $p \Rightarrow q$, схемата на Пап е универсална, а тази на Евклид не може да бъде прилагана винаги. Схемата на Пап работи както за задачи, при които $p \Leftrightarrow q$, така и при задачи, при които $p \Rightarrow q$ е вярно, но $q \Rightarrow p$ не е вярно. При схемата на Евклид изводите трябва да са винаги само от тип $p \Leftrightarrow q$.

1.1.6. Принцип на трайно усвояване на знанията

Постигането на трайно запомняне, поне на най-важните факти от изложената теория, показва доколко добре е била преподавана тя. Постигането на трайност на знанията е следствие както от успешното прилагане на всички останали дидактически принципи, така и от целенасочени действия от преподавателя. Такива действия може да са:

- Разделяне на учебния материал на последователно подредени теми (структурни смислови части), определението на всяка от които води до точни и ясни асоциации със знанията, които съдържа тя. Подобни термини, водещи до асоциации със знания, трябва да се въвеждат и на по-ниско равнище – вътре в изложението на самите теми;
- Демонстрирането на връзките между различните теми е задължително – преподавателите трябва да показват явно, че всеки въпрос от конспекта е базиран

на други теми, както и че други теми зависят от него. В противен случай може да се окаже, че някоя тема, определена като „по-трудна“ от обучаемите, може да бъде отхвърлена от тяхната база от знания като „излишна“. Това, от своя страна, ще доведе до сериозни проблеми в бъдеще, когато се въвеждат нови знания, които зависят от нея;

- Извършване на повторение на важни изводи и дефиниции с цел многократното им припомняне, което, от своя страна, води до трайно усвояване;
- Разглеждане на един проблем от различни гледни точки;
- Изтъкване на практическата полза на усвоените знания;
- Използване на цялата база от знания при оценяването, т.е. липсата на теми, за които обучаемите знаят, че „не се падат на изпит“, от което би следвало, че те няма да бъдат научени.

1.1.7. Принцип на индивидуален подход

Индивидуалният подход в обучението дава задача за преподавателя да може да адаптира изложението си според нуждите на всеки отделен обучаем. При обучение в големи групи това е една трудна за осъществяване задача. На първо време трябва да бъдат съблюдавани различията на ниво „учебна група“. Както всеки индивид е уникален, така и всяка група от индивиди има своите особености спрямо другите групи. В процеса на обучение е възможно да се наложи преподавателят да прави промени в хорариума за преподаване на различните теми (да се дава повече време за усвояване на едни знания за сметка на други) или в начина на изложение на учебния материал, когато това би спомогнало за постигане на по-високи общи резултати за конкретната учебна група.

Друг важен момент е да се дава възможност на обучаемите да задават въпроси по време на учебните часове. Така преподавателят може да види кога „веригата се е прекъснала“ (нещо от изложението му е останало неразбрано) за даден ученик. Един правилен начин за спазване на индивидуалния подход е в такива моменти преподавателят да обясни неразбрания материал по различен начин, т.е. от различна гледна точка. Така, едновременно, обучаемият получава индивидуална помощ, а останалите в групата не скучаят, а знанието им се затвърждава.

1.2. Приложение на основните дидактически принципи в обучението по линейна алгебра

Дидактическият принцип за активност е един от най-важните при обучението по линейна алгебра. Учебният предмет Линейна алгебра е с високо ниво на абстракция и е традиционно труден за студентите. Това мнение е подкрепено от множество източници като например (Jaworski, et al., 2011), (Cowen, 1997), (Klapsinou, et al., 1999), (Dorrier, 2002), (Wu, 2004), няколко статии в (Dorrier, 2000) и др. В тези източници също така се застъпва тезата, че прилагането на принципа на нагледност, чрез предоставяне на практически примери за приложението на знанията по линейна алгебра в практиката

спомага значително за повишаване на мотивацията за учене и за разбирането на изучавания материал.

Дидактическият принцип на съзнателност също е важен за предмета Линейна алгебра, защото нивото на абстракция е високо и често се наблюдава ефект на „дистанциране“ на студентите от учебния процес. В (Waliullah, 2007) са представени статистически данни от анкети, които потвърждават това мнение и показват, че процентът от студентите, които разбират изучения по линейна алгебра материал в дълбочина, е прекалено нисък спрямо други учебни предмети. Показано е, че студентите масово имат елементаризиран поглед върху повечето от разглежданите теми. Поради тази причина е добре преподавателите да стимулират творческото мислене при студентите, като изискват по-често те да преформулират и да обясняват със свои думи дадени дефиниции и твърдения; да изискват и по-често „обратна връзка със студентите“ и, когато е нужно, разбира се, да ги коригират.

Всяка изява на непринудена активност от студентите трябва да бъде поощрявана, но и коригирана по съответен деликатен начин, когато тя води до очевидно погрешни изводи. Линеината алгебра е един от предметите, в които няма особено голям потенциал за творчески (нестандартни) решения на задачите – материалът стъпва на строга дедуктивна математическа структура, а задачите се решават чрез изведени алгоритми. Поради тази причина преподавателят може да стимулира активността на студентите чрез странични дейности, например чрез използване на математическо моделиране. Също така е удачно преподавателят да изисква включване от страна на студентите при правенето на изводи и анализирането на полезността на определени твърдения и теореми. Казано с други думи – преподавателят трябва често да задава въпроси към студентите и така да ги въвлеча активно в процеса на обучение. Това са същите препоръки, каквито се дават и относно принципа на съзнателност.

Спазването на принципа на достъпност в обучението по линейна алгебра (както и при други предмети, които традиционно се водят в първи курс, първи семестър) винаги е било конфликтна точка във висшите училища. В (Николов, и др., 2007), от гледна точка на психологията, много подробно са разгледани проблемите на първите стъпки на бившите ученици като настоящи студенти. Дадените препоръки са сътресението в социалния фактор на студентите (отделянето на индивида от неговото семейство, промяната на социалната среда като цяло) да се компенсира чрез фокусиране в развитието на волевия фактор и по този начин да се притъпят негативните последици от промяната в социалната среда. Преподавателите трябва да създадат чувство, че студентите са се издигнали в социалната йерархия, като едновременно с това да породят и чувство за отговорност в тях и така да способстват за появата на академичен дух. Трудността това да се осъществи идва от нуждата то да се прави чрез съблюдаване на принципа на достъпност. Понякога се налага преподаваният материал да се елементаризира, някои неща да бъдат обяснени на неакадемичен, прост и достъпен за младежите език, вместо „да се вдига летвата“ прекалено високо и материалът да бъде почувстван като чужд за тяхното ниво. Преподавателите, които водят учебни предмети на първокурсници, трябва да бъдат и до известна степен психолози, да могат да

обясняват на достъпен за студентите език, както и да бъдат готови да компенсират знания, които евентуално са били пропуснати или забравени в училище.

Като математическа дисциплина, преподаването по линейна алгебра не изпитва сериозни проблеми за прилагането на принципа на системност. Цялата теория подлежи на дедуктивно надграждане. Дефинират се първични понятия и аксиоми, след което чрез тях се надгражда с дефиниции на нови понятия и с формулирането на твърдения и теореми, които винаги се доказват. От дидактическа гледна точка единствените затруднения, които е възможно да се очакват при систематизираното изложение на учебния материал, могат да бъдат свързани с принципа на достъпност.

Относно принципа за трайно усвояване на знанията, в линейната алгебра няма нещо специфично, което да изисква специален педагогически подход или специализиран метод. Преподавателите трябва да накарат студентите си да отсеят съществените, основополагащи елементи от теорията на всеки въпрос от конспекта и съответно да се уверят, че всички студенти са ги усвоили добре, а не просто са ги запомнили наизуст. Например не е важно да се помнят детайлите около отделните стъпки в доказателствата на теоремите. Важно е да се помнят формулировките на теоремите и техните изводи, а за доказателствата се изисква просто наличие на усет (евристични умения) за пътя, по който да бъдат направени.

При индивидуалният подход също няма особени специфики, свързани с учебния предмет. Както при всички други учебни предмети е важно преподавателят да обръща внимание на индивидуалните нужди и да отговаря адекватно на въпросите на студентите. Важно е и преподавателят да дава възможности за индивидуална помощ на студентите извън официалните учебни часове. За постигането на тази цел много спомага използването на субект-субектни канали за комуникация в електронното обучение (Тупарова, 2007), които ще бъдат разгледани в дисертационния труд.

1.3. Структура на лекциите и упражненията във висшите училища от гледна точка на психологията

Утвърдената практика в повечето висши училища е Бел-Ланкастърската система на обучение. Студентите се разделят на отделни учебни групи от 15 до максимум 30 души. В учебните програми се обособяват учебни предмети, а във всеки учебен предмет се обособява последователност от взаимосвързани теми. За всеки учебен предмет учебните групи от дадена специалност посещават заедно „лекции“ с изложение на теорията от страна на опитен преподавател (в България обикновено хабилитиран), последвани от семинарни или лабораторни „упражнения“, които обикновено води асистент.

Една утвърдена схема за изучаване на отделни уроци в училищата и гимназиите е шесткомпонентната система описана в (Ганчев, и др., 2002):

1. Подготовка за усвояване на нови знания: прави се пропедевтика, чрез която учениците се подготвят за усвояването на нови знания и за придобиване на нови

умения. При подготовката е нужно да се актуализират старите знания, като се наблегне на тази част от тях, която ще бъде използвана активно в новия урок, както и да се извърши тяхната систематизация;

2. Въвеждане на нови понятия: добре преговорените стари знания, в комбинация с поставени нови проблеми, довеждат учениците до логичното търсене на нови знания, чрез които да се решат тези нови проблеми. Това може да се осъществи чрез подходящи задачи с практически примери. Посочват се близки до познатите, но все пак непознати за тях явления и обекти (т.е. от тяхната зона на близко развитие според (Виготски, 1978)). Така се формира и обемът на новите понятия, които ще бъдат изучавани;
3. Изучаване на въведените понятия: посочват се теореми-свойства и теореми-признаци. Извършва се анализ и синтез, с които тези теореми се доказват. В тази стъпка се извършва убеждение на учениците, че новите знания са истинни;
4. Утвърждаване на изучените знания: решават се задачи за упражнение, с които се дава поглед от различни гледни точки върху изучения материал. Също така се осъществява ефект на повторение, с което пък се постига по-трайно запомняне. Обикновено се започва с решаване на кратки и лесни за решаване задачи, с които се потвърждават някои от нововъведенията. Решаването на по-сложни задачи, в които се използват множество логически връзки между изучените знания, е удачно да се въвежда постепенно;
5. Поддържане на знанията чрез индивидуална работа: задачите за индивидуална работа могат да се дават както по време на учебния час, така и за самостоятелна подготовка в извънучебно време. Целта на индивидуалните задачи е да се формират умения за самостоятелно разсъждение върху проблемите;
6. Проверка и оценка на усвоените знания: в жаргона в училище това е утвърдено като „контролни“ и „класни“ работи в зависимост от сложността и количеството на материала. Това обаче може да е и всякаква друга форма на изпитване – писмена или устна. От изключителна важност е учениците да имат респект към въпросните изпитвания. В началните класове те са важно звено за подкрепа на мотивацията за учене, а с течение на времето по-добрите ученици отместват фокуса си от получаване на добри оценки към стремеж за добиване на нови знания.

В зависимост от комбинацията на тези компоненти се обособяват различни видове уроци. В университетското образование обаче има известни разлики при преподаването спрямо училищната система. В България средното училище оценяването е фокусирано най-вече върху т. нар. формативно оценяване (formative assessment), докато във висшите училища се акцентира на финалното обобщаващо оценяване (summative assessment). Така последният, шести компонент „оценяване“ във висшето образование, обикновено е изнесен извън обхвата на лекциите и упражненията в обособени изпити, като усвояваната материя се засяга само частично от оценяване чрез т.нар. „текущ контрол“. Причината за това е, че се предполага, че студентите вече имат изграден стремеж към добиване на нови знания и при тях изпитите не би следвало да са

от първостепенна важност за тяхната мотивация. Друга причина за преместването на оценяването в края на учебния процес е, че по този времето отделено за него се намалява.

В (Мирчев, 2006) се казва, че *„стремежът да се направи по-силна връзката и по-плавен преходът средно – висше образование, според нас винаги е бил актуален и полезен“*. Един от аспектите на този преход е промяната на начините на оценяване на знанията. В училище учениците са оценявани основно на базата на „контролни“ и „класни“ работи, които покриват част от понятието „текущ контрол“, наложено в университетите. Обратно – при висшето образование основната форма на оценяване е „изпит“, който се прилага в края на семестъра в отделно обособено време, наречено „сесия“. Що се отнася до нуждата от плавен преход, ако „текущият контрол“ за оценяване бъде премахнат напълно, първокурсниците може да получат „чувство за безнаказаност“ при евентуално пропускане на усвояване на знания, с което да започнат да отпадат от учебния процес. Поради тази причина при учебните предмети от първи курс, особено в първи семестър – както обикновено е по предмета линейна алгебра, е важно текущият контрол да бъде по-засилен и с по-голяма тежест спрямо учебните предмети от по-горните курсове. Това не означава да бъде въвеждано провеждане на контролни работи и писане на оценки след всеки учебен час – такъв подход е възможно да принизи университетското обучение до училищното ниво, от което дори да не започне преход към желаната промяна. Добре е да се въведат малко по-строги срокове за предаване на домашни работи, курсови задачи и курсови проекти, както и поне една или две междинни контролни работи по време на семестъра.

Друг момент със съществена разлика се отнася към петия компонент от модела. По-слабо подготвените обучаеми традиционно се отнасят пренебрежително към своите домашни работи, а преподавателите нямат достатъчно средства за непосредствен контрол по време на тяхното писане – те могат да осъществяват последващ такъв чрез поставяне на оценка. Особено в основното и частично в средното образование се разчита на ролята на семейството за коригиране на подобно пренебрежително отношение. В университетското образование обаче такъв коректив почти или напълно липсва. Главно се разчита на това, че студентите трябва вече да имат изградени навици за съвместно извършване на поставените им учебни задачи. За съжаление практиката показва, че това не винаги е така. Поради тази причина понякога се налага преподавателят да е по-настоятелен и да поставя по-строги изисквания към студентите от първи курс, когато види, че те не спазват поставените им задачи в необходимия срок.

В (Cashin, 1985) са описани следните предимства на лекционното обучение в големи аудиторни зали:

- *„Лекторите могат ефективно да предават съществен интерес по темата чрез техния собствен ентузиазъм;*
- *Лекторите могат да предават материал, който не е наличен по други канали за студентите;*
- *Лекторите могат да са специално организирани за обгрижване на специалните нужди на специфични аудитории;*

- *Лекторите могат да представят големи обеми информация;*
- *Лекторите могат да презентират пред големи аудитории;*
- *Позволява се максимален контрол над предаваното учебно съдържание;*
- *Помага се активно на хората, които са способни да учат чрез слушане.“*

Според същата статия обаче лекциите имат следните недостатъци:

- *„Лекциите не успяват да дадат адекватна обратна връзка от студентите;*
- *Студентите са пасивен участник и няма механизъм за установяване на това дали са интелектуално активни към материала;*
- *Информацията, предадена на лекции, има тенденция да се забравя по-бързо;*
- *Лекциите обикновено изхождат от презумпцията, че всички студенти са на едно и също ниво на разбиране;*
- *Лекциите изискват ефективни ораторски способности;*
- *Лекциите не отговарят на нуждите на студентите, които нямат способности за учене чрез слушане.“*

Поради тези причини при разделянето на учебния процес на „лекции“ и „упражнения“ трябва да има отношение и към това какви дейности се поемат от хабилитирания преподавател и какви от асистента. Университетската лекция трябва да обхваща основно компоненти 1, 2 и 3, а упражнението поема компоненти 4 и 5 от шесткомпонентната система. Оценката (компонент 6) е споделена, като обикновено текущият контрол се поема от асистента по време на упражнения (в които се оценяват и решенията на задачите, поставени в компонент 5), а обособеният в края на семестъра изпит се провежда от двамата преподаватели заедно. Разбира се, това разделение е основно и грубо. Съвсем възможно е част от теоретичния материал да се изучи по време на упражнения, а част от практическите задачи да бъдат демонстрирани по време на лекции. От първостепенна важност обаче е лекциите и упражненията да бъдат напълно синхронизирани. По-подробно подобен модел е разгледан в (Гюдженев, 2006).

Съществуват и форми на обучение, в които разликата между лекция и упражнение е размита и практически лекции липсват. Например такава система на обучение се прилага в Американския университет в Благоевград. Такива системи практически премахват проблемите на университетската лекция, описани по-горе. Като основен недостатък може да се изложи липсата на икономия на хабилитиран труд. Освен това се губи и психологическият ефект от обучението в голяма аудиторна зала. Но дори при тези алтернативни класно-урочни системи трябва да се отбележи, че шесткомпонентната система продължава да е налична в своята университетска форма и се спазва. Тоест, тази система се оказва, че е основополагаща за ефективното добиване на нови знания.

В (Николов, и др., 2007) е мотивирана нуждата да бъде получен т.нар. “системен ефект” в психологическата структура на отделните лекции и семинарни упражнения. За целта е дефиниран следният модел на последователност:

1. **Мотивиране:** постигане на когнитивен дисонанс и мотивиране на студентите да получат нови знания. Основна тежест за това се поема в процеса на изложение на теоретичния материал по време на лекции, но и упражненията също могат да спомагат за него;
2. **Рефлексия:** това е преместването на знанията от зоната на близкото развитие към зоната на актуалното развитие на студентите. За да има наличие на рефлексия, задължително трябва да се започне с концентрация – обучаваният субект трябва да се фокусира върху дискутирания или представяния проблем. Естествено, за да се постигне това, той трябва да бъде предварително добре мотивиран. Втората стъпка от рефлексията е т.нар. „аха-момент“, в който се прави първоначалното преместване на знания към зоната на актуалното развитие. Тези първоначални знания обаче не винаги са пълни, изчерпателни, а понякога дори не са верни. Затова се продължава с „разбиране“ и „селекция“, т.е. осъзнаване на детайлите и систематизиране на получената информация;
3. **Интерполация:** постигане на „когнитивен консонанс“, т.е. подреждането на йерархичната структура на знанията и пълното преместване на новопридобитите знания в зоната на актуалното развитие на студента. Понякога това довежда и до нуждата от реструктуриране на стари знания и дори до подреждането им в изцяло нова структура и отричане на старата. Постигането на качествен когнитивен консонанс води до ефект на удовлетвореност;
4. **Фиксиране:** процес на утвърждаване и преповтаряне на вече придобити знания от различни гледни точки и под различни форми. Колкото по-добро фиксиране на знанията се получи, толкова по-качествен и по-естествен (ненасилствено постигнат) ще бъде следващия етап на самоподготовка. Обикновено фиксирането на знания е най-успешно тогава, когато се демонстрират чисто практически примери за тяхното приложение. Затова и упражненията са най-подходящата територия за него. Понякога при по-силните студенти се постига фиксиране още по време на лекции. В такива случаи е добре асистентът да приложи индивидуален подход и да даде самостоятелни, по-трудни задачи на тези студенти по време на упражнения;
5. **Интеграция:** това е крайната фаза на един цикъл от лекции, семинарни и практически упражнения, при която се прескача от локална удовлетвореност (от самата лекция/упражнение) към удовлетвореност от учебния процес като цяло. С други думи това е „наместването“ на резултатите от цикъла лекция-упражнение в цялата система от преподадени лекции и упражнения в курса.

Чрез изложения модел лекциите и упражненията се разглеждат като една обща структура с пълна взаимосвързаност. Не е правилно да се оставя да битува мнението, че при тях се учат различни неща, т.е. – неправилното разграничаване на теория от практика, което обикновено води до активно добиване само на практически знания и умения. Такова разделение в крайна сметка превръща обучението в университетите в добиване на занаят без научна основа.

Също така е важно в процеса на обучение да се обърне внимание на приетата в България и много други държави таксономия на Блум (Bloom, et al., 1956). Тя разделя интелектуалното поведение в когнитивната (познавателната) област на шест нива:

- **Знание (възприемане):** включва запомняне, възпроизвеждане и разпознаване на факти, термини, закони и дефиниции, но в същата форма, в която са преподадени в учебната среда. Това е равнището на догматично усвояване на информацията и от обучаемия не се очаква да интерпретира или преработва знанията, а само да ги запомни като задължителни факти. Това най-ниско ниво на познавателната дейност е основополагащо за всички следващи категории и без него обучението би било невъзможно;
- **Разбиране:** включва способността да се извлече съществен смисъл от изучаваната материя. Това е трансформирането на възприетите знания чрез обяснение, обобщение и прогнозиране. Нивото на разбирането използва информацията, натрупана от нивото на възприемането;
- **Прилагане:** включва способността за използване на “разбраното” в нови, непознати ситуации. На това ниво вече “разбрани знания” – като принципи, методи, правила и концепции, се прилагат за решаването на непознати задачи;
- **Анализ:** включва разделяне на общата материя на по-малки части и разглеждането им поотделно като самостоятелни единици. Това ниво е стъпката към решаването на по-сложни задачи;
- **Синтез:** включва способността за обединение на вече анализирани части в едно цяло. При нивото на синтез за първи път може да се говори за “творческо мислене”, понеже частите се обединяват по съвсем нов, непознат до този момент начин;
- **Оценка:** включва способността да се обобщава и окачествява стойността на решена (синтезирана) задача. Оценката винаги трябва да се дава по точно определени критерии и норми.

От публикуването на тази таксономия до сега са правени както множество ревизии, корекции и подобрения, така и алтернативни таксономии. В (Anderson, et al., 2000) е предложена съвременна ревизия на таксономията на Блум, която в днешни дни добива все по-широка употреба. В (Генджова, 2012) е дадено подробно сравнение между двата варианта на таксономииите. В преработения вариант на таксономията е променен редът на категориите (оценяването вече не е крайна фаза), както и са прецизирани някои от термините с цел по-точно описание на процесите. Последователността при нея е: *запомняне -> разбиране -> прилагане -> анализиране -> оценяване -> създаване*.

Следването на показаните системи и таксономии дава един плавен процес на качествено обучение. Става ясна и пълната взаимосвързаност между лекциите и упражненията. Именно тя е предвестникът на качествената самоподготовка, което е и най-търсения ефект от целия процес. Не е препоръчително връзката между теория и практика да се прекъсва на което и да е ниво!

1.4. Някои методи за ефективно провеждане на лекции

В литературата през годините са давани множество практически насоки за това как да бъдат провеждани качествено лекции пред големи аудитории. Тези знания – и най-вече умението да се прилагат, не са излишни и за един асистент, който провежда упражнения, защото и упражненията често включват елементи на лекционен начин на преподаване, които просто са с различен мащаб. В (Вірченко, 2003) са дефинирани няколко различни класификации за видовете лекции. Според учебното съдържание лекциите се делят на:

- *„Встъпителни;*
- *Прегледни;*
- *Тематически;*
- *Обобщителни;*
- *Указателни.“*

Според начина на преподаване лекциите се делят на:

- *„Монологични;*
- *Информационни;*
- *Информационно-проблемни;*
- *Проблемни;*
- *Лекции-консултации;*
- *Комбинирани.“*

Изборът за тип на лекцията следва да бъде извършен според степента на сложност на учебното съдържание, структурата на учебния план и предварителната подготовка на студентите.

Отново в (Вірченко, 2003) се предлагат „основни дидактически изисквания към лекциите“:

- *“Лекцията трябва да има цялостен характер с ясно разделени цели;*
- *Лекцията трябва да въвежда в науката, да определя основните ѝ идеи и методи, мястото ѝ в съкровищницата на знанията;*
- *Курсът от лекции трябва да дава система на знания;*
- *В лекцията трябва хармонично да се съединяват логически, исторически, образователни и възпитателни съставки;*
- *По време на лекцията трябва да се осъществява единство на формата и съдържанието, като тя трябва да е ярка и емоционална, до определена степен да впечатлява студентите, да ги подтиква да мислят върху проблемите на науката;*
- *Лекцията трябва да е ясна и лаконична, достъпна и добре илюстрирана. Тя трябва да е добре аргументирана;*

- *Лекцията и нейните части трябва да се преподават с нормален темп, чрез който слушателят да има възможност да разбере всичко и да запише основното от нея.*”

В (Ryan, et al., 2005) се дефинират два основни типа учене при студентите – пасивно и активно. При пасивното учене те получават готови знания, без да изразяват собствено мнение в учебния процес, т.е. те предимно слушат и при нужда записват учебен материал. При активното учене студентите са преки участници в учебния процес, те обсъждат, анализират и синтезират информацията. Изразено е мнение, че активното учене води до по-трайни знания, както и води до по-ефективен процес на разбиране, анализиране и синтез. Това мнение е подкрепено и в (Гюдженев, 2007), където се прави заключение, че *„за лекцията се вижда, че едно от важните изисквания към нея е тя да възбужда активност от страна на студентите“*. В (Дичева, 1997) се казва, че *„ученето е процес на конструиране, а не на абсорбиране на знания“* и още, че обучаемият *„трябва да бъде активен и да отнася новото знание към вече притежаваното“*. Последното е лесно постижимо при активното учене и обратно – остава под въпрос при пасивното.

В (Паев, 2003) са обобщени няколко основни метода за динамизиране на активното учене по време на лекции. Те могат да бъдат преформулирани като насоки по следния начин:

- Студентите трябва да са запознати с конспекта на курса преди неговото начало. Освен това е силно препоръчително заедно с конспекта да се дава обширно резюме преди започването на всяка една тема. Ползата от въвеждането на такава практика е, че студентите ще имат елементарна предварителна подготовка за темите, които ще слушат. По този начин може да се очаква по-активно първоначално включване в учебния процес, както и добра възможност за преподавателя да изостри когнитивния дисонанс в началото на лекцията, давайки противоречиви с предварителните очаквания на студентите твърдения и примери с неочаквани резултати;
- Вътрешно реструктуриране на лекцията, като тя да бъде разделена на няколко части, които включват различни форми на обучение. Например след като студентите вече са запознати с резюмето по дадената тема, лекцията може да започне с кратка дискусия, свързана с очакванията и предварителната настройка към нея от самите студенти. Именно чрез тази дискусия лекторът може да добие ценна информация за настроеността и равнището на студентите, като по този начин би могъл да настрои изложението си за постигане на по-ефективен когнитивен дисонанс. Същото може да се повтори и в малко по-късен етап, където след нова междинна дискусия лекторът може да установи дали когнитивният дисонанс е повлиял достатъчно, както и доколко е усвоен преподадения материал и по този начин преподавателят да успее да адаптира следващите си действия. Важно е дискусиите да са кратки и добре планирани. Може да се провеждат и кратки “беседи”;
- Поставянето на някои практически задачи за онагледяване на материала също води до по-добро разбиране. Хубаво е примерите да са кратки, точни и ясни. По-

сложните практически задачи е редно да бъдат отнесени към часовете за упражнения;

- Използването на мултимедия и средства за визуална стимулация по време на лекции, целящи основно засилване на дидактическите принципи на нагледност, съзнателност и активност, в днешни дни е масова практика. Освен че добре подготвените мултимедийни презентации разнообразяват лекцията, те разсейват монотонността ѝ и позволяват по-лесно усвояване на части от нея, които биха изисквали много време за абстрактно и сложно обяснение. Възможно е по време на представянето да се отделя кратко време, в което студентите да беседват и обсъждат графики, представени резултати от изследвания, статистика от проучвания, анкети или други данни представени чрез мултимедията. Хубаво е въпросите да изискват предположения, фокусирани в зоната на актуалното развитие на студентите, като по този начин в почти цялата си част техните заключения ще са правилни. Така няма да се губи съществено количество лекционно време, а студентите ще останат с вътрешната удовлетвореност, че те сами са достигнали до решаване на зададената задача, като това ще повиши и тяхното самочувствие. Лекторът, от своя страна, ще получи ценна информация за случаите, в които са допуснати съществени пропуски или той е избързал прекалено много, като по този начин самият той ще може да се коригира;
- Част от лекциите може да са съпроводени с провеждането на кратка анкета или тест. Те трябва да се базират върху основни факти и проблеми от разглежданата тематика. Някои от анкетите и тестовете може да са анонимни, а други да са поименни и дори влияещи на крайната оценка в курса. Практически се оказва, че дори анонимните анкети водят до повишена мотивация и изостряне на вниманието на студентите. Ползите от резултатите при такива анкети и тестове пък, от своя страна, дават ценна информация, която може да послужи за обогатяването и коригирането на учебния процес в бъдеще.

Различните автори отделят особена роля за активизиране на студентите чрез внасяне на интерактивност в лекциите. В (Радев, 2010) е предложена следната дефиниция за понятието „интерактивен метод“: *„форма на продуктивно и реципрочно диалогово и полилогово взаимодействие между субектите в процеса на обучение лице в лице, чрез която се обменят информация, идеи, дейности, състояния и съвместно се постигат конкретните цели на обучение върху основата на три онтологични равнища – личностно, социално, духовно“*. Авторът препоръчва да се прави ясна разлика между интерактивността „лице в лице“ и интерактивността, която се осъществява дистанционно, чрез канали за субект-субектна комуникация в Интернет. Съществуват университети, в които дори е въведено нормативно изискване за наличие на интерактивност при преподаването по време на лекции (Cunniff, et al., 2009).

В (Piermeier, 1998) е проведено изследване за ползите от използването на регулярно задаване на кратки въпроси, с представени възможни отговори (т.е. тестови въпрос със затворен отговор), по време на лекции в големи аудиторни зали. Резултатите от това изследване показват значителна полза от прилагането на този метод. Методът е наречен

“Conceptest” и за първи път е дефиниран като термин в (Mazur, 1997). Методът първоначално се използва изключително успешно в Харвард, а от там и в много други американски университети.

В (Гюдженев, 2007) е предложен метод за допълнителна мотивация на студентите, в който лекторът задава въпрос на студентите и ако някой студент успее да отговори правилно и да се обоснове добре, това оказва влияние на оценката му на изпита в края на семестъра. Авторът препоръчва поставения въпрос да е такъв, че отговорът му да изисква проява на съобразителност.

В подкрепа на интерактивността по време на лекции са предложени множество методи в (Гибс, и др., 1997). При тях се отделя значително повече време на диалогичния процес между студенти и между преподавател и студенти. Някои от тях са:

- **Разговорни (бъз) групи** – разделяне на студентите по двойки и поставяне на въпрос за кратки (2-3 минутни) дискусии между тях. Удачно е въпросите да са многовариантни, а не с отговори от тип „правилно“ и „грешно“. Също така е важно въпросите да не са прекалено общи, а да са фокусирани върху конкретно поставен проблем. Според авторите подобни кратки дискусии в разговорни групи могат да възстановят мотивацията и вниманието към лекцията за период от около 15 минути;
- **Проблемно ориентирани и синдикални групи** – разделяне на студентите на групи от 4 до 6 човека, които решават практическа задача, непосредствено след изложението на теоретичния материал от страна на преподавателя. От студентите се изисква писмен доклад (решение на задачата) в края на лекцията. Самият преподавател активно участва, като помага на различните групи, когато това е нужно. Прилагането на този метод води до по-добро разбиране на материала, защото различните студенти го обсъждат помежду си и го пречупват през различните си гледни точки;
- **Пирамида** – поставяне на индивидуална задача, по която всеки студент работи самостоятелно, след което следва обединение на студентите по двойки за обсъждане на същата задача, след което по четворки и т.н. Обикновено се спира до разделянето по четворки. Въпросите отново, както при синдикалните групи, са практически ориентирани и с многовариантен отговор. Авторите препоръчват 2-3 минути за самостоятелна работа, до 5 минути за работа по двойки и до 10 минути в работа по четворки. След завършване на дискусиите преподавателят изисква докладване на резултатите, като една произволна група обяснява какво е тяхното заключение, а към останалите преподавателят поставя отворен въпрос за това да коментират какво е различно при тях. Този метод се счита за по-ефективен от предишните два, защото взаимопомощта между студентите е на много високо ниво. За сметка на това този метод отнема значително повече време;
- **Четене по време на лекции** – отново разделяне на студентите по групи от 3-4 човека, като им се поставя за задача да прочетат и дискутират помежду си определен текст от учебника, свързан с предмета. Възможно е да се постави задача на студентите да намерят и прочетат различни пасажии от учебника, след

което да набележат основни точки за разрешаването на даден проблем. В края на отделеното време се провежда обща дискусия, подобна на тази при метода „пирамида“;

- **Студентите като преподаватели** – може да се поставят задачи за различни самостоятелни или групови доклади, които студентите трябва да изнесат пред аудиторията по време на следващата лекция. Това ги мотивира особено силно, защото те изпитват страх „да не се изложат“ пред останалите си колеги. Именно подобен страх обаче би бил предвестник на това някои от студентите, на които е поставена задачата да изнесат доклад, да отсъстват и да не го изнесат реди колегите си. Поради тази причина е добре приемането на такива доклади да става по желание на самите студенти, а не насила. Преподавателите трябва да бъдат по-снизходителни към докладчиците по време на тяхното изложение. Ако има поводи за критика, тя не трябва да е прекалено остра и в никакъв случай не трябва да води до засрамване на докладващия, защото такова действие би внесло смут, страх и несигурност сред останалите докладчици;
- **Дебат** – дебатирането по дадени проблеми почти винаги е по-интересно от монолога. Един възможен метод, макар и доста рядко прилаган, е двама преподаватели да проведат дебат помежду си по време на лекция. Добра възможност за това е да се дискутират предимствата и недостатъците на два различни, но относително равностойни метода за решение на един и същи проблем. Преподавателите могат да задават подвеждащи и закачливи въпроси помежду си, като това особено силно ще повиши интереса в аудиторията. При подобни дебати е удачно да се дава по-често възможност за „въпроси от публиката“. В края на дебата може да се проведе обща дискусия или гласуване за това кой от предложените методи според студентите е бил по-удачен. Възможно е прилагането на този подход (дебатирането) в комбинация с други – като например пирамида или синдикални групи.

Отново в (Гибс, и др., 1997) се препоръчва да се отделя време от лекцията, в което студентите да формулират свои въпроси. Авторите са на мнение, че ангажираността на студентите около запомнянето на информация и воденето на записки не им позволява да могат да формулират своите въпроси за много кратко време, например, както се случва най-често, когато непосредствено преди края на лекцията преподавателя пита „Имате ли въпроси?“ и обикновено се получава така, че студентите нямат. Затова те препоръчват лекторите да отделят повече време за дискусия около изясняване на неясните моменти от материала в края на своята лекция. Това се подкрепя и в (Гюдженов, 2007), където авторът пише, че трябва да има *„предоставяне на възможност на студентите по собствена инициатива и желание да поставят въпроси“*.

В (Тодорина, 2005) са дадени множество насоки, принципи и правила за провеждане на субект-субектна комуникация в учебна среда от гледна точка на психологията и педагогиката. Според автора съблюдаването и спазването им би довело до по-ефективен и по-безконфликтен учебен процес. Казва се, че преподавателите трябва да допринасят за пораждането на положителни емоции в своите студенти, а не да ги отблъскват. Затова

спазването на висока култура на педагогическото общуване е много важно при прилагането на интерактивни методи за обучение, като например споменатите по-горе. Много от тези препоръки са предложени и в (Вірченко, 2003).

Съществуват още много методи за интерактивно взаимодействие. Над 180 метода от различни източници са изброени и описани накратко в (Yee, 2005) – както за комуникация „лице в лице“, така също и такива за дистанционна комуникация с помощта на Интернет. Разбира се, възможната употреба на повечето от тези методи по време на лекции е силно ограничена. Важно е да се отбележи, че интерактивното обучение в никакъв случай не трябва да бъде поставяно като цел – то може да бъде разглеждано само като средство. Това мнение е застъпено в (Радев, 2010).

Други възможности за по-ефективно преподаване по време на лекции (фокусирани предимно върху математически учебни дисциплини) са предложени в (Гюдженев, 2007). Някои от тях са:

- *Мотивиране на новите знания посредством индуктивно (чрез сравнения и обобщения) достигане до нови понятия, твърдения и идеи или рационално използване на предварително натрупан опит;*
- *Включване на студенти при извършване на сравнения, обобщения, осъществяване на отделни стъпки в доказателства на теореми и др.;*
- *Създаване и използване на задачи-компоненти с цел намаляване на трудността на някои теореми;*
- *Ясно разграничаване на условие, заключение и доказателство на всяка доказвана теорема;*
- *Осъзнато използване на дидактическите принципи като средство за търсене на възможности за онагледяване, индивидуализация, достъпност, системност, трайност, активизация;*
- *Съобразяване с темпото, с което студентите си водят записки и стремеж да им се предоставя достатъчно време за тях;*
- *Завършване на лекцията с достигане до нови проблеми на базата на изложеното в нея ново съдържание, решаването на които се планира да се извърши в началото на следващата лекция.*

Във всички разгледани научни публикации може да се каже, че преобладава мнението, че традиционното монологично изложение в лекциите трябва да бъде допълвано и дори замествано от интерактивност, т.е. винаги да има известна степен на активност в учебния процес от страна на студентите.

В (Jaworski, et al., 2011) авторите са предложили модел, в който на студентите се раздават предварително писмени материали за всяка лекция и студентите са длъжни да носят разпечатка на тези материали по време на провеждането на лекцията. По този начин се цели да се намали времето за писане – студентите водят само уточняващи бележки (в предварително предвидени бели полета) върху разпечатаните материали. Като възможна критика към този метод може да се предвиди евентуално по-ниско

качество на записките, разгледани като учебни материали. Пълните записки обикновено са пречупени през гледната точка на студента, докато не е ясно доколко разбираеми ще са отпечатаните материали с прикрепени допълнителни бележки – след като е изминало време и студентите вече са забравили детайлите относно говореното по време на дадена лекция.

Отново в (Jaworski, et al., 2011) авторите предлагат един индуктивен подход за преподаване на нови знания конкретно по линейна алгебра. В него лекторите поставят разнообразни задачи, които впоследствие обобщават в „наблюдения“. Всъщност, както самите автори отбелязват, тези „наблюдения“ не са нищо по-различно от традиционните теореми, но наричайки ги по този начин целят да се избягва формализма. Авторите предлагат понякога да се пропускат доказателства, когато те са прекалено дълги и сложни за конкретния момент от лекцията. Пропуснатите доказателства се изучават по-късно, когато студентите вече имат изградена обща визия за изучаваната тема. Авторите са дефинирали този подход като „пример – аргумент – обобщение“. Те твърдят, че по този начин материалът става по-разбираем за студентите. Обучаемите първо натрупват база от знания с т.нар. „наблюдения“ и чак след това „се връщат назад“ и изучават същия материал повторно, но този път изчерпателно – на дедуктивен принцип (изучавайки и пълните доказателства на теоремите). В предложението в (Jaworski, et al., 2011) организационен модел за провеждане на лекции и упражнения, предметът линейна алгебра е двусеместриален. В първия семестър авторите наблягат предимно на индуктивния принцип за натрупване на знания, а през втория семестър излагат теорията дедуктивно и с изчерпателни доказателства (или както те наричат този традиционен подход: „дефиниция – теорема – доказателство“). Ползите от един подобен подход може даже да се определят като очевидни, но, от друга страна, не може да не се отчетат и негативите, свързани с нуждата от значително повече отделено лекционно време, т.е. значително увеличен хорариум по учебната дисциплина, например, както в изследването са отделени два семестъра вместо един.

1.5. Някои методи за ефективно провеждане на упражнения

От гледна точка на психологията е много важно прекъсването на „училищния феномен“, т.е. наизустяването на процедури и алгоритми за достигане до решение на задачите, вместо да се разберат основите на знанието, което трябва да се предаде, и от там да се извеждат решенията на задачите. В (National Research Council, 1989) е казано, че в математиката винаги има база от първични понятия и аксиоми, които трябва да бъдат запомнени (дори „наизустени“), но надграждането на знанията трябва да се извършва чрез употреба на следните три основни правила:

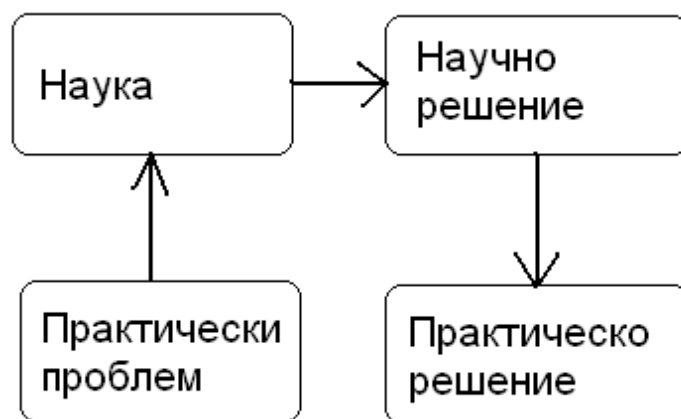
- Вместо да се изучават готови процедури, решенията трябва да бъдат търсени;
- Вместо да се дават наготово формули, шаблоните трябва да се намират;
- Вместо да се дава готови рецепти, трябва да се правят предположения и догадки.

За да може един студент да приложи подобен подход към научно познание, той трябва да е вътрешно мотивиран. В (Лечева, 2009а) се казва, че *„мотивацията е съвкупност от енергетични сили, произтичащи от вътрешни или външни за индивида предпоставки, които предизвикват неговото поведение и определят формата, посоката, интензивността и продължителността на това поведение“*. Немотивираните студенти правят обратното - те учат „по принуда“, т.е. с цел „да си вземат изпитите“. Такива студенти рядко получават (изграждат) цялостен поглед върху знанията, които са придобили – те по-често наизустяват готови алгоритми за решаване на типови задачи. Натрупването на такива наизустени алгоритми, в крайна сметка, би могло да доведе до качествен скок в тяхното развитие и те да успят да осъзнаят фундаментите на дадената наука, но интуитивно е ясно, че подобен стил на работа би отнел много повече време и много повече усилия от страна на учебното заведение. Поради тази причина може спокойно да се твърди, че всеки добър преподавател би предпочел да работи с добре мотивирани за учене студенти, отколкото със слабо мотивирани или в най-лошия случай – апатични към учебния процес.

Наложилата се в последните години нужда от масовизация на висшето образование (не само в България, а, както пише в (Каракашева, 2012), и по целия свят) довежда до все по-свободен достъп на по-слабо мотивирани ученици до университетите. В (Гюрова, 2010) е посочено, че много преподаватели посочват слабата мотивация като един от най-сериозните проблеми във висшето образование. Това е особено вярно за непопулярните специалности, за които няма текуща „мода на пазара на труда“. Поради тази причина е особено важно преподавателите, особено в първия курс на висшето образование, да положат значителни допълнителни усилия към създаване на интерес към учебния процес и повишаване на мотивацията на студентите. Основна роля за повишаване на тази мотивация може да се отреди на асистентите по време на провеждане на семинарни или лабораторни упражнения. Именно асистентите са служителите (представителите) на институцията (университета), които имат най-близък контакт с обучаемите. И в това отношение е важно именно асистентите да допринасят за по-високата активност на студентите по време на семинарните и лабораторните упражнения, понеже, както е посочено в (Гюрова, 2010), *„човек цени повече това, което е постигнал с цената на повече усилия“*.

В (Николов, и др., 2007) се казва, че *„потребностите пораждат мотиви, а мотивите прерастват трайно в интереси“*. Пораждането на интереси към създаване на приноси за науката и към ефективно приложение на научни знания в практиката е нещото, което университетът цели да постигне като краен резултат от обучението на своите студенти. Затова е важно университетската среда да може да предлага множество от разнообразни дейности, които да ангажират свободното време на студентите с позитивни емоции и начинания и по този начин да ограничат средата на негативните потребности за сметка на позитивните. Според много автори поставянето на практически проблеми, които могат да се разрешат (и в учебния процес трябва да се разрешават) с апарата на изучаваната наука, води до съществено повишаване на мотивацията при обучаемите, като създава потребности за добиване на научни знания.

В (Ганчев, и др., 2002) е предложена схема на взаимовръзката между наука и практика (фигура 1). Явната демонстрация на тази взаимовръзка би могла да доведе до съществено повишаване на интересите на обучаемите към добиване на научни знания. Някои автори (например (Юруков, 2001)) дори съветват за „обръщане на традиционния модел“, като предлагат обучението да започва с поставяне на практически ориентирани задачи, които да бъдат решавани на принципа на индукцията и обобщавани като теоретични знания, като по този начин се замести традиционният процес на дедуктивно изложение на учебния материал от общите закономерности на теорията към частните примери от практиката.



Фигура 1. Решаване на практически проблем с научен подход

Един от начините за моделиране на практически задачи е използването на междупредметни връзки. Съществен научен труд, в който не просто се демонстрират подобни задачи в математиката, а се показва и методическа основа за моделирането им, е написан от проф. Иван Ганчев в (Ганчев, 2007). Въпреки че този труд е ориентиран към обучението по математика в основните и средните училища, той спокойно може да послужи като насока и за целите на висшето образование. В (Мирчев, 2006) е представен модел за учебно съдържание за извънкласна работа по математика в училище, в който са показани множество примери за практически ориентирани задачи, които въвеждат обучаемите в решаването на задачи, свързани с полиноми, теория на числата, графи и математическо оптимизиране – теми, чиято област от знания спада към традиционните за сферата на висшето образование. Там авторът мотивира приложения технологичен модел с правене на „по-плавен преход“ между средно и висше образование. Спокойно може да се твърди, че поставянето на подобни задачи по време на упражнения в университета би спомогнало по същия начин за въпросния плавен преход, дори студентите-първокурсници да не са имали подобна предварителна подготовка от училище.

В (Schoenfeld, 1992) се казва, че „задачите по математика на университетско ниво поставят цели, които варират от решаване на практически проблеми и формиране на критично мислене до развиване на творчество“. Това мнение недвусмислено потвърждава нуждата от поставяне на практически задачи в учебния процес по математика във висшите училища, като последното дори може да се сведе до една от

основните цели на упражненията. В (Попкочев, 2010) и (Балкански, 2010) се препоръчва използването на метод за изучаване на реални практически казуси при обучението в педагогически специалности (в първата статия) и по мениджмънт (във втората). Би могло да се предположи, че този метод може да бъде използван и в обучението по математика като цяло, естествено адаптиран спрямо конкретната специалност.

Един възможен подход за моделиране на връзки между различни учебни предмети е представен в (Ganchev, et al., 2009a). Той би могъл да помогне на асистентите не просто да моделират практически задачи, а да създават такива, от които може да се извлече полза (повишена мотивация у студентите) не само за текущия, а и за други учебни предмети. Това е една възможна оптимизационна задача, която би повишила ефективността на висшето образование като цяло. Някои учебни предмети поддържат силни връзки помежду си – такива са например предметите „Линейна алгебра“ и „Аналитична геометрия“. Много често по време на обучението по линейна алгебра се дават нагледни примери със задачи от аналитичната геометрия и обратно. В (Herniman, et al., 2005) е написан учебник по линейна алгебра, в който изключително силно са застъпени именно връзките с аналитичната геометрия. В България дори често се наблюдава обединяване на линейна алгебра и аналитична геометрия в един смесен учебен предмет. Задачи от линейна алгебра се дават често и в „Увод в програмирането“, особено когато студентите се обучават за работят с масиви от числа. При други учебни предмети такива връзки също съществуват, при това не по-малко силни, но често се оказва, че преподавателите не ги изтъкват и не ги използват явно. Примери за такива пропуски се виждат от изследването, представено в (Гюдженев, 2007).

В прегледа на методи за ефективно провеждане на лекции беше отбелязано, че друг важен момент за повишаване на мотивацията на студентите е прекъсването на монотонността и прилагане на принципите на активното учене. Що се отнася до семинарните и лабораторните упражнения активното учене не само, че трябва да бъде използвано, а то трябва да стои в тяхната основа! Това мнение е подкрепено в една от много често цитираните статии в англоезичната литература – (Brown, et al., 1982). Там е изразено мнение, че в повечето случаи обучаемите трябва сами да конструират свое собствено осмисляне на учебния материал, като по този начин те ефективно ще могат да систематизират и разберат информацията, която им се поднася, а това е най-същественото що се отнася до нуждата да могат да прилагат добитите знания и в нови, неразглеждани до този момент ситуации. Този подход в (Дичева, 1997) е дефиниран като „концептуално разбиране“.

Палитрата от методи за провеждане на интерактивно обучение по време на упражнения е много по-богата от възможностите за това по време на лекции. Причината е, че групите за конкретен учебен час са значително по-малки, което позволява много по-близък контакт и по-високо равнище на индивидуален подход. В (Рейс, и др., 1995), (Гибс, и др., 1997), (Тодорина, 2010), (Тодорина, 2011), (Тодорина, и др., 2012) са представени разнообразни методи за интерактивно взаимодействие по време на упражнения. Някои от тях са:

- **Задаване на въпроси към цялата група** – това е основният и най-често прилаган метод за осъществяване на „обратна връзка“. На базата на отговорите асистентът може да оцени доколко студентите са разбрали изложения от него материал и какви трудности изпитват. Понякога, особено в първи курс на висшето образование, се чувства „бариера“ в комуникацията и студентите трудно поемат инициативата да дадат отговор. Асистентите трябва да подхождат по-дружелюбно и да предразполагат студентите към подобен род комуникация. В никакъв случай не трябва да се допуска унижение (язвителна забележка от страна на асистента, когато даден студент е отговорил погрешно). Това би отблъснало другите студенти и би довело до страх от бъдещо включване в следващи дискусии;
- **Изнасяне на доклади от страна на студентите** – подход, с който студентите планирано се подготвят да разкажат и обяснят на своите състуденти цяла или част от тема за дадено упражнение. Авторите препоръчват такива упражнения да се провеждат по желание, а не насила. При подобен род семинари ролята на преподавателя е контролна, а не водеща. Препоръчва се преподавателят да не е прекалено критичен, ако даден студент се провали и не успее да проведе упражнението по адекватен начин. В такива случаи преподавателят трябва да подходи като помощник на студента и да неутрализира негативите, а не да го напада. Добре е преподавателят да проведе предварителен инструктаж за основни правила, които трябва да се спазват, но тези правила не трябва да са прекалено строги, за да не „убият“ творческия елемент в изложенията на студентите. В този смисъл е по-добре той (преподавателят) да подготви студентите за евентуалните проблеми, с които те ще се сблъскват, вместо да ги инструктират догматично как да проведат семинара. Този метод е много сходен с предложения за изнасяне на доклади от студенти по време на лекции, но тук възможностите за създаване на интерактивна среда на обучение са много по-големи;
- **Разделяне на групата на малки подгрупи за решаване на различни типови задачи** – може да се осъществи, когато студентите трябва да направят множество еднотипни изчисления за решаване на дадена задача. В този случай задачата се разделя на подзадачи и всяка подзадача се възлага на малка група студенти (обикновено 2-ма до максимум 3-ма). Помагайки си взаимно, студентите във всяка подгрупа се опитват да решат задачата и накрая докладват своите решения. Асистентът приема решенията, при нужда ги коригира и накрая обобщава решението на цялата задача;
- **Разделяне на групата на подгрупи за решение на задача по различни начини** – този метод е подходящ при наличие на поне два възможни метода за решаване на дадена задача. В такъв случай асистентът виртуално разделя учебната зала на части (толкова на брой, колкото са възможните методи) и възлага на студентите от всяка част да се организират и да решат задачата по един от дадените методи. Накрая студентите дават своите решения, отговорите се съпоставят (разбира се, трябва да са еднакви) и се провежда обща дискусия за изясняване на това кой метод е по-удобен и по-ефективен. Ако учебната група е прекалено голяма, а методите са ограничени, асистентът може да удвои броя на подгрупите, като по

този начин един метод за решение ще бъде възложен на две или дори повече подгрупи. Идеята е групите да не стават прекалено големи и по този начин част от членовете на групите да бездействат за сметка на други. Полезно е, по възможност, всеки един участник в подгрупите да бъде активен;

- **Разделяне на групата на подгрупи за решаване на задачи-компоненти** – подходът се използва при възлагане на големи задачи, които могат да се разделят на независими една от друга подзадачи. В (Ganchev, et al., 2009b) е казано, че *„решение на задача, в което е включена доказана теорема, може да се разгледа като серии от наредени задачи, които се базират само на преди това решени задачи или приети за верни твърдения“*. Такива задачи обикновено се дават в края на упражнението, когато преподаваните техники се обобщават, за разлика от началото на упражнението, когато е удачно да се решават по-кратки и по-лесни задачи – въпросните задачи-компоненти. При предложения метод, всяка подгрупа от студенти решава възложената им задача-компонента. Накрая те докладват своите решения, а асистентът систематизира и свързва решенията на различните подгрупи. В заключение се провежда дискусия и се правят изводи;
- **Дебат, пирамида, проблемно ориентирани и синдикални групи, разговорни (бъз) групи** – тези методи са разгледани в по-горе главата, където бяха разгледани методи за активизиране на студентите по време на лекции. Същите методи биха могли да бъдат приложени в умален вид и по време на упражнения;
- **Метод Jigsaw** – методът е разгледан в (Tuparova, et al., 2009) и (Tuparova, et al., 2010) от гледна точка на провеждане на електронно обучение, но този метод може да се използва и в традиционен учебен час (Aronson, et al., 1978). Студентите се разделят на групи от по 5-6 човека. Учебния материал също се разделя на толкова части (5-6, т.е. колкото хора има в групата) и на всеки човек от всяка група се задава задача да изучи въпросния учебен материал. Първоначално всички студенти от различни групи, на които им се е паднал един и същи въпрос, се обединяват в нови, т.нар. „експертни групи“. Те обсъждат поставените им проблеми и извеждат решение заедно. След като експертните групи свършат своята работа, студентите се връщат обратно в оригиналните (първоначалните) си групи и обединяват решенията, които са получили от различните части на учебния материал. При този метод е изключително важно всеки един студент да е активен. По такъв начин се намалява конкуренцията между студентите и се насърчава работата в екип;
- **Дискусия чрез „кръгове“** – поставя се даден въпрос и се дава възможност на няколко различни студента да изразят своето мнение по него. Добре е въпросът да е от зоната на близкото развитие на студентите, за да бъде провокирано тяхното активно мислене по поставения проблем. Важно е асистентът да приеме ролята на медиатор и да контролира коректния тон на въпросната дискусия;
- **Ролеви игри** – подгрупите не се формират по естествен “приятелски” принцип, а обучаващият задава конкретни “роли” на всеки един от участниците, като ги подбира по такъв начин, че да се изтъкнат силните страни на конкретния студент. При този модел е нужно всеки студент да има ясно дефинирана подзадача на

основната задача, която той трябва да реши. При коректно решаване на всички подзадачи от всички участници се достига и до общото решение на цялата задача. При този метод решаването на подзадачите не се прави самостоятелно, а изисква интерактивна взаимовръзка с останалите студенти. От гледна точка на математиката въпросните подзадачи не са „задачи-компоненти“, които могат да се решават самостоятелно, а са подзадачи, които са зависими от междинните сметки от останалите подзадачи. Поради тази причина моделирането на ролеви игри е задача със значителна сложност при обучението по математика. Този метод е много по-лесно приложим при хуманитарните науки, където подобни взаимовръзки се моделират много по-лесно. При всички положения ролевата игра ще бъде ефективна тогава, когато е извадка на реална, практически изпълнима ситуация. По този начин обучаемите истински се вживяват в ролите си и обучението е най-ефективно;

- **Споделяне на личен опит** – вместо просто по стандартен начин да се оценяват разработените курсови проекти, курсови работи или домашни работи, преподавателят събира групата от студенти и кара всеки един от тях да представи резюме на своята разработка пред останалите. По този начин студентът предава натрупания от самия него опит на цялата група. Оказва се, че често това може да доведе и до непланирана активна дискусия, т.е. да се засили още повече проблемно-ситуационният подход на обучение. Освен това може да се твърди, че споделянето на натрупания личен опит пред по-широка група участници прави обобщението на получените резултати много по-изчерпателно и по-точно, като така също се засилва ефектът на трайно запаметяване на натрупаната научна информация;
- **Мозъчна атака** – вид дискусия, при която зададената задача е с повишена трудност, обикновено дори извън зоната на близкото развитие на обучаваните. Освен това задачата би следвало да е колкото се може по-обща и решението ѝ да може да се извърши по множество различни начини. Идеята на такъв вид дискусия е да се генерират колкото се може повече и най-разнообразни мнения. Ролята на обучаващия като участник в дискусията е почти напълно изключена. Допускат се и дори се поощряват всякакви нестандартни, дори и шеговити идеи. Важната роля на преподавателя тук е да насърчава последващ анализ и обобщение върху дадените идеи. При мозъчната атака е важно също така генерирането на колкото се може по-голямо количество на мнения и идеи, като по този начин основателно се очаква да се активизира диалектическият закон за количествените натрупвания и преминаването им в качествени изменения.

По време на семинарните занятия – от всичко изброено дотук, може би най-често прилагано в практиката е задаването на въпроси от преподавателя към студентите. Това е основен подход за „включване“ на студентите в учебния процес. Важно е преподавателят не просто да задава въпроси към цялата група, от където е логично да се очаква, че само най-активните студенти ще отговорят, а да задава и персонално насочени въпроси към всеки студент поотделно. Пасивните студенти не трябва да бъдат пренебрегвани, а трябва да бъдат насърчавани да се включват активно в учебния процес.

Обикновено въпроси, които изискват активно мислене от зоната на близкото развитие на студентите, не е подходящо да бъдат задавани персонално – това би смутило по-слабите студенти и така може да се накърни тяхното самочувствие. При такива въпроси е добре да се направи опит да се възбуди дискусия, като се зададат общо към цялата група. Обратно – въпроси от зоната на актуалното развитие на студентите е безпредметно да бъдат задавани към цялата група, защото е нормално да се получи моментален отговор от страна на по-активните студенти. Затова въпроси от тази зона е подходящо да се задават персонално на по-пасивни студенти. Относно персоналните въпроси, в (Cowan, 1997) е казано, че студентите бързо разбират, ако преподавателят има фаворити и винаги се обръща само към тях. Затова е подходящо преподавателите често да задават „бързи“ персонални въпроси и да се стремят да ги насочват винаги към различни студенти. По този начин всеки студент във всеки един момент ще има очакване, че може евентуално да бъде попитан. Ако този метод се прилага целенасочено, може да се очаква, че повечето от студентите ще се подготвят по-добре преди упражненията.

В (Cowan, 1997) е изразено мнение, че *„когато студентите имат навик да говорят в клас, самите те много по-често ще задават въпроси“*. Това логично се отнася предимно за въпроси от зоната на близкото развитие на студентите. Те почти никога не задават въпроси, свързани с тяхната зона на актуално развитие. Ако го направят, това означава, че те имат пропуски, следователно преподавателят има грешна представа за границите на тяхната актуална зона. В този смисъл може да се предложи термин „очаквана зона на актуалното развитие“ (на студентите, от гледна точка на преподавателя), която в някои случаи може да се окаже, че не съвпада с реалната.

Друг важен аспект при провеждането на един курс са учебните материали, които преподавателите предоставят на своите студенти. Приетият абсолютен минимум е „студентите да са получили предварително учебната документация“ (Рейс, и др., 1995). В България като нормативни изисквания е прието най-често тази документация да включва анотация, учебен план и библиографска справка. В библиографската справка се посочва препоръчителна литература, която би дала изчерпателна информация върху всички аспекти на предмета, който предстои да се изучава. Практиката обикновено показва, че студентите се насочват към закупуване на наличните в книжарницата на университета учебници и рядко се задълбочават в посока изследване на литература, която е налична само в библиотеката. Що се отнася до семинарните и лабораторните упражнения, най-често се предлага сборник със задачи или ръководство за решаване на задачи по съответната дисциплина, но практиката показва, че студентите рядко проявяват самоинициатива да се подготвят предварително преди дадено упражнение – те обикновено учат по принуда от срокове за предаване на домашни работи или преди изпит. За щастие компютърната техника в днешно време значително облекчава достъпа на студентите до учебно съдържание. В повечето университети вече е въведено дори нормативно изискване за това учебни материали да бъдат публикувани в средите за управление на учебно съдържание от университетските компютърни мрежи.

В (Каракашева, 2012) е предложен организационен модел за провеждане на семинарни упражнения по математически анализ, в които преди всяко упражнение

студентите получават „лист със задачи за предварителна подготовка“. Това е дидактически материал, който съдържа несложни задачи, които студентите решават извънаудиторно и по този начин се подготвят за предстоящото упражнение. В края на всяко упражнение, всеки студент получава комплект от учебни материали за следващата тема. По този начин авторката твърди, че, от една страна, се постига по-висока активност на студентите, а, от друга – успешно се компенсира намаленият хорариум по дисциплината в университета, в който тя работи. В съответния дисертационен труд (Каракашева, 2011) този модел е потвърден с емпирични данни като успешен. Същият подход се забелязва и при други, напълно независими организационни модели. Например в (Jaworski, et al., 2011) авторите използват този модел в обучението по линейна алгебра, където на всеки студент се раздават „седмични задачи“ (weekly problem sheets) след всяка лекция. В (Gibbs, et al., 2004) е цитиран пример за същия подход, като е направено наблюдение, че в момента, в който на преподавателите им се е наложило да прекъснат въпросните седмични задачи поради повишена лична заетост, активното участие в учебните часове и – в заключение, крайните оценки на студентите са намалели значително.

1.6. Психологически особености на студентите, влияещи на субект-субектната комуникация

За да бъде спазван добър тон на педагогическо общуване, следва да се отчитат и психологическите особености на студентите. Има много различни подходи за класификацията на хората според техните психични особености. Обикновено разделението се прави чрез оценка на реакциите на даден човек при определени ситуации. На базата на такава оценка се описват чертите му.

Стандартно, моделите, които се използват в психологията, са двуполюсни. За „център“ се взема средното ниво на търсеното качество, извлечено от мащабно изследване. След това се съставя оценъчна скала. Например може да се оценява невротичността на даден човек, като се съпоставят неговите невротични черти спрямо средното ниво, определено от другите хора, и по този начин да бъде “поставен” в групата на “силно” или “слабо” невротичните. Друг пример е стеснителността – един човек може да бъде определен като силно или слабо стеснителен спрямо средното ниво на стеснителност на всички хора. Естествено, такива крайни разделения на само две групи са прекалено условни и груби – обикновено се взема нормално разпределение на резултатите спрямо тестовите и статистически може да бъдат определени много по-тясно специализирани групи. Колкото по-конкретно бъде оценен даден човек, толкова по-точни и съответно ефикасни конкретни мерки могат да бъдат предприети при педагогическото общуване с него.

1.6.1. Типология на личността според Карл Юнг

Разделението на хората спрямо техните психически особености може да се прави не само по специфични признаци, а и по комплекси от признаци. Такъв например е моделът,

създаден от швейцарския психолог и психиатър – ученик на Зигмунд Фройд, Карл Густав Юнг (1875-1961), който фиксира четири размерности на човешката психика:

- Интровертен – Екстравертен;
- Сетивен – Интуитивен;
- Мислители – Чувствени;
- Преценяващи – Възприемащи.

От гледна точка на приложението на интерактивни методи за обучение, от изброените групи най-важни са характеристики на първата размерност – интроверти и екстраверти. Поради тази причина те ще бъдат разгледани по-подробно от другите.

1.6.1.1.Интровертност и екстравертност

В (Николов, и др., 2007) подробно е разгледана първата размерност (“екстравертност” и “интровертност”) от гледна точка на педагогическото общуване. Тези два полюса разделят множеството на хората спрямо съпротивата им срещу стрес и потребностите им за общуване. Двете групи зависят от следните черти:

- *„Напълно естравертните личности са:*
 - *Неуравновесени;*
 - *Общителни;*
 - *Нетревожни;*
 - *Оптимистични;*
 - *Необидчиви.*
- *Напълно интровертните личности са:*
 - *Уравновесени;*
 - *Стеснителни;*
 - *Тревожни;*
 - *Песимистични;*
 - *Обидчиви.*“

Неслучайно е използвана думата “напълно” – реално трудно може да се каже, за който и да е човек, че е “пълнен екстраверт” или “пълнен интроверт”. Всеки човек има комплекс от комбинации на изброените по-горе качества, които може да са развити в различна степен и рядко някой покрива абсолютно точно всичките критерии на едната от двете групи. Въпреки това, на базата на статистически резултати, може да се твърди, че даден човек е “част от екстравертната група” или “част от интровертната група”. За удобство такива хора се наричат “екстраверти” и “интроверти”. Неутралните хора, т.е. тези, които имат по равно качества от всяка група, се наричат “амбиверти”.

Типа личност се формира на базата както на биологични, така и на социални фактори. Независимо от тези фактори, ефективното обучение изисква общуването между преподавател и студент да отчита неговата екстравертна или интровертна насоченост и по този начин да се стимулират различна група от качества на студента. Професионално-

педагогическото общуване е междуличностно отношение между два субекта – студент и преподавател. Добрите отношения дават позитивни резултати, а лошите отношения – негативни. Очакваните позитивни резултати са добити нови знания и умения при студента. Преподавателят е тази страна в общуването, която трябва да съдейства на студента за овладяване на знанията и придобиване на уменията, които са необходими за специалността. Когато отношението на преподавателя води до негативни емоции в студента, процесът е неуспешен. Целта на психологията, която се основава на теорията за екстравертните и интровертните личности, е да се изгради такава методика на общуване, която да поражда максимално добри емоции в студентите. Важно е да се знае какво означава за учебната среда един студент да бъде екстраверт или интроверт. В (Николов, и др., 2007) са предложени следните определения:

- *„Типичният екстраверт се ръководи от ценностите на средата около него. Той се интересува от полезното и практичното. Интересува се и действа спрямо мнението на обкръжаващата го социална среда, но в същото време стремително се опитва да представи своето мнение в нея. В него е заложена тенденцията да ръководи, възпитава и изисква. Той е силно общителен и весел. При тежко опониране на негово мнение често избива агресия и гняв. Въпреки това той много трудно ще се обиди. Обича да прекъсва и да “спори докрай”. Външните дразнителни не представляват заплаха и екстравертът смело влиза в “битка” с тях;*
- *Типичният интроверт се ръководи най-вече от субективния фактор. Когато оценява даден обект, той не се интересува от общоприетите ценности за него, а от преживените емоции, вътрешните си потребности и изграденото лично отношение към него. Интровертът е силно обидчив и стеснителен. Не влиза в спорове и бързо се примирява с чуждото мнение дори да е крайно несъгласен с него. Външните дразнителни влияят изключително силно на психиката му и дори слаби такива се приемат за силна заплаха. Няма готовност за ръководни функции, не желае да поучава и възпитава никой. Интровертите рядко проявяват каквато и да е агресивност, обичат строгия ред и ясните правила, обичат да се изолират от компанията и често са песимистично настроени към света около тях.“*

На базата на споменатите качества в (Николов, и др., 2007) и (Felder, 1993) са предложени различни методи за работа с екстравертни и интровертни личности. Част от тях са:

- Екстравертните личности са по-предразположени към практически занимания, докато интровертите са много по-добри по научни и теоретични дейности. Това трябва да се отчита при разпределяне на задачите за самостоятелна подготовка. Например на екстравертите е по-подходящо да се възлагат задания за практическа реализация на конкретни научни проблеми. Този тип лесно може да използва междупредметни връзки и да се свързва с други преподаватели за консултация. Освен това при екстравертите не е необходимо заданието да е подробно описано и алгоритмизирано. При интровертите е по-добре да се дават

задания по ясни критерии и точно определени задачи, в които да се прави синтез, анализ и обобщение на чужди изследвания;

- Екстравертите се стремят към спечелването на награди. Те желаят да изпъкват пред останалите и да бъдат забелязвани. Затова при тях водещата сила в учебна среда е получаването на отлична оценка. При интровертите качеството е различно – те нямат непременен стремеж към постигане на отличителни резултати, но имат сериозна тревожност от евентуален неуспех. Така можем да си направим “тактика” при поставянето на учебни и изследователски задачи – на екстравертите се изтъква възможността за освобождаване от изпит или някаква морална награда, докато на интровертите се изтъква потенциалната загуба и при тях трябва да се използва т.нар. отрицателно подкрепление (изтъкват се евентуалните пропуснати ползи).
- Относно чувството за отговорност трябва да се знае, че интровертите са изключително старателни. Те не могат да си позволят да не свършат зададената работа в обещания от тях срок. Точно на обратния полюс са екстравертите – те с лека ръка обещават дори непосилни за тях резултати. Затова е целесъобразно екстравертите да бъдат контролирани много по-строго;
- Относно учебната среда екстравертите предпочитат груповата работа. Интровертите са на обратния полюс и те предпочитат самостоятелните упражнения. При поставянето на задачи е добре да се отчитат тези качества. Най-удачно е техните качества да се комбинират, т.е. да се поставят групови задачи по двойки, в които равностойно да се разпредели работата между екстраверт и интроверт. По този начин единият ще компенсира недостатъците на другия и обратно. Това обаче е важно да стане под строг контрол от страна на преподавателя, защото екстравертите лесно поемат напълно инициативата и “изземат” или потискат задачите на интровертите;
- Поведението в учебния час също е различно. Когато бъде зададен въпрос от преподавателя към студентите, именно екстравертите са тези, които ще поемат инициативата да отговорят, дори да не са подготвени да дадат верен отговор. Те не изпитват неудобство при грешка, а стремежът им за изтъкване спрямо останалите е водещ. При интровертите това не е така – често те не желаят да отговорят на зададен въпрос дори да знаят верния отговор. Затова е добре преподавателят да стимулира интровертите към влизане в диалог, но и да ги подкрепя активно, когато те водят спор с екстраверт – в противен случай интровертите лесно се примиряват с чуждото мнение и ще изпитат негативни емоции. Когато позицията на интроверт е грешна, това не трябва да се изтъква грубо и директно – добре е грешката да се отбележи с притъпена критичност и той да бъде поощрен за поетата инициатива за отговор.
- При оценяването на разработките трябва да се знае, че тревожността на интровертите предразполага допускането на повече дребни и несъществени грешки, но в същото време се покриват всички аспекти на работата. Строгото отбелязване на малките грешки от страна на преподавателя често води до повишена тревожност и притеснителност в интровертните студенти. Затова

диалогът по разработката трябва да е спокоен и позитивно настроен. Импулсивността на екстравертите пък ги кара често да изпипват най-дребни детайли по дадено направление, но да пропускат съществени моменти в други насоки на своите работи. Те често приравняват стойността на големите пропуски и малките грешки. При тях е целесъобразно преподавателят специално да отбелязва коя грешка е съществена и коя не. Тяхната емоционалност и възможна обидчивост не позволява на преподавателят да е по-прямо и директен в оценките си.

- Отново при оценяването трябва да се знае, че екстравертите много по-бързо успяват да възпроизведат запомнена информация. Те бързо завършват своя изпит и са нетърпеливи относно получаването на резултати. При интровертите ситуацията е на обратния полюс – ефективната им работа изисква спокойна работна среда и достатъчно време. Често времето за изпит не им достига. Страхът от постигане на негативен резултат ги кара да избягват контакт с преподавателя, с което странят и от неговата помощ. Затова по време на изпит е целесъобразно преподавателите “непоканени” да помагат на интровертите и да “връщат” екстравертите за доработване при отбелязана грешка, когато те предават прибързано своята работа.

1.6.1.2. Сетивност и интуитивност

В (Lewis, 2003) е разгледана и втората размерност в класификацията на Юнг от гледна точка на ръководителите на екипи в бизнеса. Подобна гледна точка би била полезна за извършване на самооценка от страна на преподавателите, които несъмнено е добре да бъдат лидери спрямо студентите (ръководители на тяхната екипна работа). В (Felder, 1993) тази размерност е разгледана от гледна точка на педагогическото общуване.

За сетивните хора може да се каже, че се ориентират най-добре чрез своите сетива. Те обичат точността и детайлите. Най-лесно се ориентират, като видят практическо приложение на изучения материал. Предпочитат фактите и очевидните наблюдения. Типични представители на сетивните студенти са тези, които изискват примери от реалния свят. Предпочитат да решават задачите по добре описани процедури и алгоритми. Не обичат частни случаи и достигане до неочаквани резултати. Те са внимателни, но учат по-бавно.

Интуитивните хора не помнят информация, поднесена наготово, а винаги я преосмислят чрез рефлексия и въображение. Не се притесняват да изучават сложни абстрактни теоретични модели. Понеже действат предимно със своето въображение, те не се нуждаят от практически примери. Обичат нестандартните решения и частните случаи. Учат бързо, но не са внимателни в детайлите.

1.6.1.3. Мислителни и чувствени

Тази скала има отношение към взимането на решения. Мислителите взимат решения на базата на логиката. При поставянето на цел за тях най-важно е нейното

достигане. Когато работят в група, за тях по-важно е достигането до резултати, отколкото взаимоотношенията с останалите хора в групата. Те лесно влизат в спор.

Чувствените хора се ръководят от взаимоотношенията си с останалите хора около тях. За тях решаването на поставените задачи не е от първостепенно значение. При работа в група за тази категория най-важни са взаимоотношенията с останалите членове на групата. Не обичат да спорят и често се примиряват с чуждото мнение.

1.6.1.4.Разсъдливи и възприемчиви

Разсъдливите хора обичат подредеността и планирането на действията си. Стремят се към контрол над ситуациите, в които попадат. Желаят да извършат задачата докрай преди да продължат към следваща. Лесно систематизират възприетата от тях информация.

Възприемчивите хора са значително по-спонтанни и хаотични в действията си. Не обичат планове и срокове за задачите, които им се дават. Трудно се поддават на контрол и самите те трудно могат да упражняват такъв. Лесно се отегчават и могат да изоставят решение на задача по средата, ако преценят, че нататък решението е ясно. Трудно систематизират информацията, която им се поднася.

1.6.2. Стиллове на учене

Стилът на учене на един студент отразява начина, по който той възприема информация. Познанието за стила на учене на даден обучаем дава възможност на преподавателя да адаптира начина си на преподаване така, че да бъде по-ефективен. Това може да бъде отнесено както към изложението на учебния материал пред цяла група от студенти (отчитайки средното ниво на групата), така и към осъществяването на индивидуална помощ при консултации.

Съществуват множество теории за стилете на учене. В (Иванов, 2004) са разгледани подробно различни модели, разделени по групи:

- Според типологията на личността на Юнг най-известни са моделите на Майерс-Бригс и Силвър-Хенсън;
- Според преработката на информация – на Фелдър-Силвърман;
- Според структурата на главния мозък – на Херман, както и на Алинсън и Хейс;
- Процесуални модели на Колб, МакКарти, Хъни-Мъмфорд, Ентуистъл, Бигс и Шмек;
- Според предпочитанията на обучаемите – на Дън-Дън, Кийфи-Монк и Райхман-Граша..

Разбира се съществуват и други, например теорията за множествената интелигентност на Гарднър (Дурева, 2007). В (Coffield, et al., 2004) авторите са изследвали 71 различни модела, които според тях „*заслужават внимание*“.

Поне в България няма установена практика за налагане на специфични нормативни изисквания за преподавателите по кой модел за стилове на учене да се ръководят. Въпреки това е препоръчително всеки един педагог да има поне минимална обща култура и да спазва някои основни правила в педагогическото общуване със своите обучаеми. Поради тази причина ще бъдат разгледани някои от по-известните и по-често цитираните модели за стилове на учене, които са от различни групи – според типологията на Майерс-Бригс, процесуалния модел на Колб, теорията на множествената интелигентност на Гарднър и модела на Фелдър-Силверман.

1.6.2.1. Модел на Майерс-Бригс

Класифицират се 16 стила на учене, които включват всички възможни комбинации от четирите размерности на човешката психика по типологията на Карл Юнг. В (Иванов, 2004) те са изброени и описани. Всеки един от стиловете се класифицира с уникален код. Първата буква е Е (екстраверт) или I (интроверт). Втората буква е S (сетивен) или N (интуитивен). Третата буква е Т (мисловен) или F (чувстващ). Последната, четвърта буква е J (разсъдлив) или P (възприемчив). Така например ESTJ ще означава “екстраверт, сетивен, мисловен и разсъдлив тип”.

В (Soles, et al., 1999) авторите изказват мнение за възможната употреба на тези индикатори при съставянето на курсове за дистанционно обучение. Според статията, съставянето на дистанционен курс изисква значителна самодисциплина и способности за ориентация от страна на обучавания. Предлагат се четири основни подхода спрямо най-често срещаните групи от фактори по класификацията на Майерс-Бригс (таблица 1).

Стил на учене	Технология	Индикатор
Слухов – учещ чрез слуха си	Видеоконференции, синхронна комуникация, споделяне на ресурси с други участници в обучението	EI
Визуален – учещ чрез описания и демонстрации	Инструкции от компютър, видеоконференции, синхронна и асинхронна комуникации	IST
Осезателен – учещ чрез опит и усещане	Инструкции от компютър, използване на различни източници от Интернет, синхронна комуникация	(E/I)ST
Кинетичен – учещ докато извършва активни движения	Биха изпитали сериозни затруднения при дистанционно обучение	EN

Таблица 1. Основни подходи по класификацията на Майерс-Бригс

Въпреки че тези съвети покриват малка част от всички възможни комбинации от класификацията, както и малка част от възможните технологии, те дават визия на бъдещите разработчици на софтуерни продукти, че техните програми трябва да позволяват адаптивност според типовете на учене.

1.6.2.2.Класификация на Колб

Според класификацията на Колб има 4 стадия на учене. Актът на учене започва с конкретен опит, съпроводен от рефлексивно наблюдение. Следва абстрактна концептуализация и завършва с активно експериментиране. Последното води до нов конкретен опит (Иванов, 2004). Идеалният обучаем би бил еднакво добър и в четирите стадия. В повечето случаи обаче това не е така и всеки студент има предпочитания към различни двойки стадии на ученето. Така Колб дефинира четири типа ученици:

- Конкретно-експериментален – препоръчват се лабораторни работи, полеви работи, наблюдения;
- Рефлексивно-наблюдателен – регистрация на данни, дневници или активно мислене по сложни проблеми;
- Абстрактно-концептуален – лекции, статии и аналогии;
- Активно-експериментален – моделиране, домашни работи.

Стил на учене	Предпочитания	Технология
<i>Дивергентен</i>	<i>Разглежда нещата от различни страни, предпочита да наблюдава, генерира идеи, работи в група</i>	<i>Различни медии за представяне на учебното съдържание – текст, графика, видео, дискуссионен форум, чат, журнал, синхронни средства за комуникация, видео- или аудио-конферендна връзка</i>
<i>Асимилативен</i>	<i>Прилага логически подход, отлично възприема широка област от информация и я представя в ясна логическа форма, интересува се от идеи и абстрактни понятия и по-малко от хората, предпочита четенето, лекциите, изграждане на аналитични модели</i>	<i>Самостоятелна работа върху даден проблем, използване на различни медии за представяне на информацията – текст, графики, видео. Използване на асинхронни средства за комуникация с достатъчно време за осмисляне на нещата.</i>
<i>Ковергентен</i>	<i>Решава проблеми, практическа ориентация, предпочита да експериментира, да симулира, да работи с практически приложения, предпочита да работи самостоятелно</i>	<i>Самостоятелно решаване на практически задания, симулации</i>
<i>Акомодативен</i>	<i>Разчита на интуицията, използва анализите на други хора, предпочита практическия опит, предпочита да работи в група</i>	<i>Изисква задължително работа в група – дискуссионен форум, чат, видео- или аудио-конферендна връзка</i>

Таблица 2. Избор на технология спрямо стила на учене

Теорията за стила на учене на Колб има две размерности, по които се формират четири типа. В (Дурева, 2007) са предложени технологични средства за електронно обучение, които биха били подходящи за всеки един от тях, представени в таблица 2.

В (Лечева, 2009б) моделът на Колб е изтъкнат като „най-популярен“. Там са предложени и някои „преподавателски стратегии“, съобразно стила на учене на производния на модела на Колб – модел на МакКарти (McCarthy). В края на статията се изразява мнение, че *„възниква необходимост студентът активно да се включва в планирането и управлението на собственото си обучение, поемайки самостоятелно все по-голяма лична отговорност като независим обучаем“*. Авторът прави заключение, че *„професионалните компетенции трябва да са обвързани със стиловете на учене и тяхното динамично използване в педагогическия дискурс“*.

В (Hong, et al., 2007) е направено изследване на 40 студента, подбрани по такъв начин, че да са равномерно разпределени сред четирите типа на Колб (средно по 5 мъже и 5 жени от всеки тип). Студентите са получили учебни материали относно създаването на анимации на софтуерния продукт Adobe Flash. В първите 20 минути всеки студент е трябвало да работи самостоятелно, без връзка с колеги. След 10 минутна почивка им били дадени нови 90 минути, в които те трябвало да продължат да работят по същата задача, но този път им било позволено да използват помощ чрез синхронна комуникация с един от четирима опитни техни колеги чрез програмата QQ. Отчетени били следните фактори: общо време, отнето в дискусия, време за разглеждане на материали, създадени от други участници в групата, време, отнето за четене на учебните материали и време за създаване на анимацията. Изследването показало, че няма съществена разлика между студентите и техните стилове на учене, що се отнася до времето, отнето за създаване на анимацията. Освен това много малка част от студентите, при това за много кратко време, са разглеждали работите на свои колеги. Съществена разлика обаче била отчетена при времето, отнето за субект-субектна комуникация, и времето, отнето за четене на електронния документ. Оказало се, че ковергентният и асимилативният тип студенти повече четат предоставените им материали и по-малко използват помощ от по-опитни колеги, докато дивергентният и акомодативният тип студенти по-малко четат учебните материали, но повече разговарят. Съществена разлика между половете не била отчетена. Този експеримент несъмнено потвърждава насоките в таблицата от (Дурева, 2007) за използване на конкретни технологични средства спрямо стила на учене по Колб.

Един възможен подход – като заключение от подобно изследване, е по възможност да бъдат предоставяни различни видове технологични средства на студентите и да бъдат оставяни самите те да подбират най-удобните за тях. По този начин се притъпяват различията между студентите от гледна точка на техните стилове на учене и така те биха могли да напредват в обучението с относително равни темпове.

1.6.2.3.Класификация на Фелдър – Силвърман

Класификацията на Фелдър-Силвърман (Felder, et al., 1988) е първоначално дефинирана за стилове на учене на студенти от инженерни специалности. След

актуализацията от Фелдър през 2002 г., подобно на класификацията на Юнг, са въведени четири размерности за оценка на индивида:

- Активен – Рефлексивен;
- Сетивен – Интуитивен;
- Визуален – Вербален;
- Последователен – Обобщаващ.

Според (Graf, et al., 2007) именно тази класификация е много удобна при моделиране на курсове, подпомогнати с електронно обучение.

Активните студенти обичат да експериментират. Те са социално насочени и желаят да работят в група. Те учат докато извършват разнообразни дейности. Рефлексивните са на другия полюс – те са по-консервативни и предпочитат самостоятелната работа. Обичат така също спокойствието и имат нужда от време, за да осмислят информацията. В (Felder, 1993) се отправя критика към наложената Бел-Ланкастърска система, като се казва, че *„повечето лекции не правят нищо за нито една от двете групи: активните студенти не се въвличат в разнообразни дейности, а за рефлексивните рядко остава достатъчно време за осмисляне на информацията“*. В (Richmond, et al., 2005) е направена аналогия между тази размерност в класификацията на Фелдър-Силвърман и типовете по класификацията на Колб.

Размерността на сетивните и интуитивните качества на студентите се припокрива с класификацията на Юнг, която вече беше разгледана..

По Фелдър-Силверман визуалните студенти предпочитат да приемат информацията чрез графики, картинки и видео. Вербалните предпочитат да четат и слушат. В (Felder, 1993) се твърди, че *„повечето хора (поне в западната култура) са визуално учещи, докато информацията в повечето лекционни курсове е преобладаващо вербална“*. Може да се каже, че тази критика в последните години не е съвсем вярна, понеже с помощта на технологичните средства на мултимедийните устройства голяма част от лекциите вече е със заложен елементи от визуални стимули за студентите.

Последователните студенти предпочитат да вървят по пътя на индукцията – от частните случаи да обобщават към общите закономерности. Те се вглеждат в детайлите. При обобщаващите студенти по-важна е цялостната картина. Те вървят по пътя на дедукцията – от общите закономерности към частните случаи. В (Felder, 1993) се казва, че *“за обобщаващия тип студенти е важно всяко ново знание да стъпва на базата на вече преди това изучени знания, но само някои преподаватели успяват рутинно да осъществят такава широка перспектива в техния учебен предмет“*. Това разбира би било по-вярно за предмети от хуманитарните специалности и в доста по-малка степен при природните науки. Що се отнася до математиката, в (Ганчев, и др., 2002) този принцип е представен като основополагащ за методиката на обучение по математика.

1.6.3. Основни принципи за създаване на учебни материали и начините за тяхното преподаване

В разгледаните литературни източници (Graf, et al., 2007), (Richmond, et al., 2005), (Дурева, 2007), (Soles, et al., 1999) и (Hong, et al., 2007) се препоръчва при създаването на обучителни курсове в Интернет преподавателите да адаптират своите учебни материали на равнище, което би било адекватно спрямо стила на учене на обучаемите. В последно време дори има разработки, свързани с автоматично адаптиране на системите за електронно обучение спрямо стиловете на учене на обучаемите. Такава адаптивна функционалност в България за стиловете на учене на Колб и Фелдър-Силверман, е реализирана в (Дурева, и др., 2007), (Дурева, и др., 2008) и (Turanova, et al., 2008), както и за Фелдър-Силверман в (Трифонов, 2013). Във всички източници се препоръчва преподавателите да наблюдават и изследват поведението на своите студенти и по този начин да модифицират курсовете си спрямо тяхното средно ниво. За студенти, които изпадат в някоя от крайностите на дадена размерност, следва да се отдели специално индивидуално внимание. Подобно заключение спрямо теорията на Карл Юнг може да се направи като извод и от изложените принципи в (Николов, и др., 2007).

Както беше отбелязано, има множество различни класификации и модели за стилове на учене. Като общ извод за всички тях, от психолого-педагогическа гледна точка, може спокойно да се каже, че е важно планираните учебни материали и начините за тяхното изложение да са достъпни и адаптирани за колкото се може по-голяма част от студентите в групата, на която се преподава. Това означава, че преподавателите трябва да се запознават с особеностите на психиката на своите студенти, а от там да адаптират „в движение“ своите курсове спрямо всяка конкретна учебна група. За осъществяването на тази цел семинарните и лабораторните упражнения са значително по-гъвкави и търпят по-мощни промени спрямо лекциите.

Обикновено изследователите в сферата на психологията провеждат мащабни анкети преди започване на учебните курсове и по този начин определят към коя група за даден модел принадлежи всеки един студент. Класическият тест за системата на Фелдър-Силвърман съдържа 44 въпроса (всеки от които с два възможни избираеми отговора). Като резултат от решаването на този тест всеки студент бива оценен по всяка една от размерностите с оценка от -11 до 11 със стъпка през 2 единици. Класическият тест за екстравертност/интровертност по класификация на Юнг се състои от 10 въпроса (с възможни отговори „да“ и „не“) и като резултат дава 5-степенна скала, градираща от пълен екстраверт, през амбиверт, към пълен интроверт. По класификацията на Колб често се използва тест от 80 въпроса (също с отговори „да“ и „не“), които определят човека в един от четирите типа. Но дори да не бъдат извършени подобни предварителни изследвания на студентите с подобни тестове, все пак е нужно и целесъобразно преподавателите да се стремят да преценяват типовете на техните студенти и да адаптират своите курсове спрямо тях. Последното е особено важно при оказването на индивидуална помощ в часовете за консултации или в системите на онлайн електронното обучение. Би могло да се помисли за поддържането на лична база със „студентски

досиета“, в които преподавателите да пазят кратки бележки за психическите особености на някои от техните студенти.

В (Николов, и др., 2007) са систематизирани следните основни принципи, които би следвало да бъдат спазвани от преподавателите, с цел да бъдат максимално близко до възможно по-широк кръг от студенти, независимо от техните стилове на учене:

- *„Избор на подходящо облекло и приветливост;*
- *Сдържан изказ без употреба на жаргон;*
- *Обяснения на достъпен за студентите език;*
- *Умерена атрактивност;*
- *Липса на субективни лични пристрастия;*
- *Без догматичност;*
- *Признаване на личните грешки;*
- *Отзивчивост при молби за помощ от страна на студенти;*
- *Подкрепа на самоинициативи и активност от страна на студенти;*
- *Помнене на имената и персонализация в общуването със студентите;*
- *Умерено преувеличаване на положителни оценки при вербалната комуникация;*
- *Ясни изисквания и обективно оценяване на знанията при писмените изпити;*
- *Стремеж към амбивертност;*
- *Спазване на определена дистанция при личните контакти – да не бъде допускана както прекалена близост, така и прекалена дистанцираност;*
- *Позитивно очакване към резултатите на студентите;*
- *Личните проблеми нямат място в учебното заведение;*
- *Изслушване на събеседниците в дискусиите;*
- *Ненатрапчива аргументираност при прояви на реакции на самозащита от страна на студентите (недооценяване на непостигнатото, умаловажаване на проблема, отказ от обсъждане, агресивност, инфантилност и др.).“*

Спазването на споменатите принципи би следвало универсално да води до положителни резултати при субект-субектната комуникация между преподавател и студент. Тези принципи, разбира се, са валидни при наличие на пряк физически контакт между преподавателя и обучаемите и само някои от тях са валидни при дистанционно обучение.

Понякога се срещат преподаватели, които отбягват да признават личните грешки. Това обикновено се дължи на комплекс от високо лично самочувствие, подкрепено от мнение, че нивото на студентите е ниско. Безгрешни хора обаче не съществуват, затова е нормално в някоя ситуация преподавателят да допусне грешка (например в тривиално изчисление по време на решаване на задача). Подобни преподаватели реагират агресивно, когато даден студент види грешката и я отбележи. Това не трябва да се допуска, защото отблъсква студентите и води до негативни настроения спрямо учебния предмет и дори до образователния процес в университета като цяло. Затова е изключително важно не само преподавателите да признават грешките си, но и да

реагират силно положително към студентите, които са ги видели. Такива студенти трябва да се награждават, а не да се наказват. В (Cowen, 1997) това е подкрепено и дори е изказано мнение, че „*студентите имат полза*“ ако видят как преподавателя се измъква от ситуацията, особено ако се налага да предприема нов подход за решаването на задачата. В тези случаи самите студенти ще черпят опит за това как да виждат своите собствени грешки в бъдеще! В (Филипова, 2010) директно се препоръчва „*наличие на демократичен стил на отношение студент-преподавател*“ като предпоставка за ефективност на интерактивните методи на обучение. Подобен стил не би бил възможен ако преподавателят използва догматичен стил на преподаване, в който не се отчита мнението на студентите.

Отново в (Николов, и др., 2007) са изброени следните общи принципи за преподаватели, с цел подобряване на възприятието и по-дълга концентрация от страна на студентите:

- **Сензитивност:** колкото повече сетива участват в изучаването на даден обект, толкова по-ефективно е възприятието;
- **Оригиналност:** еднотипните неща и еднообразността притъпяват концентрацията, затова е добре да има стремеж към създаване на усещане за уникалност в учебните задачи, дори в процеса на упражняване и затвърждаване на знания;
- **Изненада:** колкото по-нестандартно е едно твърдение, толкова по-силен когнитивен дисонанс ще предизвика;
- **Емоционалност:** когато знанието има личен емоционален заряд (т.е. засяга факти от ежедневието), значително по-голям ще е интересът към него;
- **Значимост:** ако знанията вътрешно се оценяват като „значими“ от студентите, те със сигурност ще бъдат запомнени – цел на преподавателите е да предизвикат именно високо чувство за значимост на учебния материал;
- **Асоциативност:** запомнянето е неимоверно по-ефективно, когато се правят аналогии с вече познати образи;
- **Шаблонност:** свързано с асоциативността – човешкият мозък винаги търси систематизация на информацията на базата на общи характеристики;
- **Йерархичност:** естествената подредба на информацията за човек идва в йерархична структура. Независимо дали става дума за индуктивно, или дедуктивно умозаключение – винаги е добре знанията да се подреждат по определени характеристики, за да могат да бъдат запомняни по-лесно;
- **Точно планирана дискретност:** процесът на обучение трябва да бъде прекъсван от почивки и разнообразни дейности (дори несвързани с учебния материал). В противен случай се губи концентрация.

В западна Европа и в САЩ е популярно едно течение в обучението наречено „анимация“ – обучение чрез забавление. Анимацията като метод за обучение е въведена за първи път от д-р Хорст Опашовски в (Opaschowski, 1981). В англоезичната литература обикновено се използва друг термин – „edutainment“, което е връзка между обучение

(education) и забавление (entertainment). Особено популярни в последните години са лекциите от формата TED, където този метод се прилага много често. В Източна Европа и Азия образователните системи са значително по-консервативно настроени към този метод и там той намира приложение по-скоро епизодично.

1.7. Някои особености на обучението по линейна алгебра

Едва ли има преподавател, който няма да се съгласи, че задачите по линейната алгебра са може би най-прости от изчислителна гледна точка, в сравнение с всички останали университетски курсове, свързани с математика. Въпреки това се получават странности – например често оценките на студентите по математически анализ са по-високи от тези по линейна алгебра (става въпрос за специалностите, където тези предмети се изучават в първи курс паралелно). В (Cowen, 1997) е цитирано мнение, че *„диференциалното и интегрално смятане е по-атрактивно за студентите спрямо линейната алгебра“*. Подобно мнение е изказано и в статия от (Dorrier, 2000). Практиката показва, че линейната алгебра се определя от мнозинството студенти като „труден предмет“ (Jaworski, et al., 2011), (Dorrier, 2000). Дори при предложените методи за индуктивно натрупване на знания и значително разширения хорариум, в (Jaworski, et al., 2011) авторите са установили, че много от студентите не успяват да разберат в дълбочина учебния материал и затова се фокусират върху наизустяване на алгоритми за решаване на задачи, вместо върху желаното осмисляне на концепции. В (Aydin, 2009) са цитирани няколко източника, на базата на които е обобщено, че един от основните проблеми на студентите е липсата на предварителна подготовка за работа с високото ниво на формализъм в учебното съдържание на предмета линейна алгебра. Също така е изразено мнение, че премахването на този формализъм от учебното съдържание не би било правилна стъпка, а напротив – би навредило допълнително на обучението по този учебен предмет. В този смисъл формализмът на линейната алгебра се разглежда като нейно ценно качество, а не като „препятствие за студенти“.

От друга страна линейната алгебра е основополагащ учебен предмет, при това не само за математици и информатици, а и за много студенти в други специалности. Линейна алгебра се използва активно във всички инженерни специалности, абсолютно задължителна е в специалности, насочени към физика и икономика, използва се активно дори при учебни предмети, свързани с биологията. Поради тази причина може спокойно да се каже, че *„линейната алгебра играе централна роля едновременно за математици и за всякакви специалисти, използващи математика“* (Cowen, 1997). Там също се казва, че *„студентите, които вникнат и се научат как да изучават линейна алгебра, ще се научат как да изучават и математика като цяло“*. Разликите в изучаването на предмета между различните специалности обикновено се свеждат най-вече до нивото на задълбоченост по различните теми.

Вече беше разгледан двусеместриалният организационен модел за курс по линейна алгебра, описан в (Jaworski, et al., 2011), който представя индуктивен подход за натрупване на знания през първия семестър и дедуктивно изложение на теорията през

втория. Подобен подход е реализиран и в САЩ (Day, et al., 2001), но на доста по-машабно (национално) ниво, като част от материалът, който се изучава традиционно в часовете по линейна алгебра, се преподава (в доста по-опростен и изчистен от абстрактни понятия вид) в гимназиалното ниво на обучение. Подобни тенденции се наблюдават и в българското образование, като вече се използват елементи от аналитична геометрия в учебния план по математика за 12 клас. Всъщност такава традиция в България съществува много отдавна за учениците от математическите гимназии. Например още през 1966 г. в учебника (Петров, и др., 1966), предназначен за математически гимназии, се въвеждат теми както от аналитичната геометрия, така и от математическия анализ.

Един типичен учебник по линейна алгебра, съобразен с утвърдения модел на обучение в САЩ, е (Denton, et al., 2012). Обучението започва с изучаване на метод на Гаус за решаване на системи от линейни уравнения и изследването им. След това се разглеждат n -мерни векторни пространства, след което и линейни трансформации. Едва тогава формално се описват матрици и операции с матрици (сбор, умножение с число, умножение на матрици). Обръща се специално внимание на т.нар. „блочни матрици“. След това се изучават обратни матрици, матрични уравнения и хомогенни системи от линейни уравнения. После се разглеждат т.нар. „LU декомпозиции“ и „блочни LDU декомпозиции“ – тема, която рядко присъства в конспектите на учебния предмет в България, които също ще бъдат разгледани. Следва поредица от теми, свързани с детерминанти и техните свойства. После се разглеждат линейни пространства и подпространства със съответни размерности и базиси, като на това място се разглежда и темата за линейна зависимост и линейна независимост на вектори. Разглеждат се собствени стойности и собствени вектори на линеен оператор, последвани от метод за „диагонализация на матрица“. Накрая се разглеждат ортогонални и ортонормирани базиси, метод на Грам-Шмид, диагонализация на симетрични матрици и ядро и образ на линеен оператор (интересното е, че чак на това място се въвежда понятието „ранг на матрица“). Последната тема е за „метод на най-малките квадрати“, която дава визия на студентите за проблемите на разглежданите до този момент методи и ги насочва към учебния предмет числени методи. Подобно разпределение на темите, с малки разлики в подредбата и с добавени някои допълнителни теми (предназначени за студенти с инженерна насоченост), може да се наблюдава и в отворения курс на Масачузетски технологичен институт – MIT, (Strang, 2010).

Съществуват и радикални виждания за реформи на учебната програма по линейна алгебра. В често цитираната си статия (Uhlig, 2002), Франк Ухлиг предлага стандартния дедуктивен подход „Дефиниция – Лема – Доказателство – Теорема – Доказателство – Изводи“ да бъде заменен с нов, очевидно индуктивен подход за преподаване, който той дефинира чрез въпросите „Какво ще стане, ако...?; – Защо се случи така?; – Как се случи?; – Кое е истина?; – Теорема“. В (Uhlig, 2003) той изказва критика към традиционните учебници, които започват с практически примери с решаване на системи от линейни уравнения с метод на Гаус, като казва, че *„подобен подход води до ограничено мислене за частни случаи, липса на удовлетвореност в студентите, еднообразни факти, липса на евристики“*. Изказва се и мнение, че *„един каменоделец първо трябва да се*

запознае със свойствата на камъка и чак след това може да започне да го обработва“. Казва се още, че „в линейната алгебра може да се започне с почти всяка тема и вътрешните сили на предмета в крайна сметка ще доведат курса до край“ и са дадени примери как курсът може да се изгради от начало до край, започвайки от различни входни точки (първи теми от конспекта):

- От дефиниция на вектори и тяхната линейна зависимост;
- От матрици и линейни трансформации;
- Чрез историческия подход, стартирайки от детерминанти;
- С традиционното за САЩ стартиране със системи от линейни уравнения.

Така естествено се поставя и въпросът „откъде е най-подходящо да се започне?“. Според (Uhlig, 2003) трудностите в усвояването на основните концепции от линейна алгебра (например на понятието „линейна зависимост на вектори“) се дължи именно на „погрешен старт“, който фокусира студентите в чисто практически дейности, а не се започва от „фундаменталната концепция на линейната алгебра“, която, според автора, е темата „линейни трансформации“. В публикацията са дадени конкретни методически насоки как може да бъде изграден курс по линейна алгебра на базата на тази идея. Казано по друг начин, подходът на Ухлиг би могъл да бъде определен като „обучение с индуктивни методи по пътя на дедукцията“, в смисъл, че курсът започва с разглеждането на най-общата възможна тема и градира към частните случаи (дедукция), но усвояването на всяко междинно знание се преподава чрез методите на индукцията (както например чрез т.нар. в (Jaworski, et al., 2011) „наблюдения“).

В (Jaworski, et al., 2011) авторите цитират мнението на една студентка, която казва, че „методът на Гаус е основен за курса по линейна алгебра и се използва в почти всяка задача“, след което студентката допълва, че „на изпит, дори да не разбира условието на задачата, ще вземе матрицата и ще приложи метода на Гаус, като това със сигурност ще и донесе поне някакви точки“. Въпреки че подобно мнение може би звучи хумористично, то едва ли е изолиран частен случай. В (Klapsinou, et al., 1999) се цитира мнение, че много често при решаването на задачи от линейната алгебра студентите просто прилагат зазубрени правила, но без да разбират теоретичната им обосновка. Там авторите посочват, че обикновено студентите остават с първоначалното впечатление, че „вектор означава подредени числа“ и те много трудно впоследствие успяват да разберат, че тези „подредени числа“ във векторите всъщност зависят от избора на базис. Подобни мнения определено работят в полза на тезата на Франк Ухлиг.

В (Klapsinou, et al., 1999) е проведено изследване, в което са сравнени два подхода в обучението по линейна алгебра. Първият е определен като „изчисление към абстракция“ и започва с традиционното разглеждане на системи от линейни уравнения и операции с матрици, чак след което се въвеждат понятията „векторни пространства“ и т.н. Вторият подход е определен като „абстракция към изчисление“ и е изцяло дедуктивен – първо се въвеждат понятията „векторно пространство“ и „линеен оператор“, а решаване на системи от линейни уравнения, операции с матрици и т.н. се показват по-късно в курса – като примери за приложение на преди това изучените знания. Като заключение от

изследването се казва, че подходът „абстракция към изчисление“ предизвиква много трудности за студентите, понеже линейна алгебра е първият предмет от висшата математика, с който те се сблъскват, а те все още не са настроени за усвояване на такъв вид информация и този подход се явява „огромна когнитивна промяна“. От друга страна се потвърждават опасенията, че подходът „изчисление към абстракция“ води до негативна тенденция студентите да пренебрегват абстрактните знания и много от тях да остават на ниво, на което могат да решават само задачите от първата част на курса. Поради тази причина в (Klapsinou, et al., 1999) се препоръчва балансиране между двата подхода.

В (Dorrier, 2002) Дорие казва, че изграждането на теорията на линейната алгебра на основата на строга аксиоматика не довежда до решаването на нови проблеми в математиката (с изключение на задачи, свързани с безкрайномерни пространства), а ползите от нея са по-скоро свързани със систематизиране на знанията в науката и възможности за по-ефективно нейно развитие в бъдеще. От друга страна, според автора, именно тази аксиоматика е затруднение за студентите, защото тя води до споменатото високо ниво на абстракция. Според него *„от дидактическа гледна точка, трудността идва от там, че за един първокурсник всяка линейна задача може да бъде решена без употребата на аксиоматиката от теорията“* и *„ползите като унификация, обобщение и опростяване, които идват от формалната теория, са видими само за експертите“*. От друга страна Дорие подчертава, че е много важно студентите да успеят да усвоят именно този формализъм, защото той е важен за по-нататъшното им обучение по други учебни предмети. Поради тази причина той препоръчва да се търси рефлексия чрез използване на елементи от предишните знания и компетенции на студентите в релация с новите формални концепции. Това заключение, разбира се, е в пълен унисон с казаното в предишните глави и, например – за нуждата от „стъпаловидно надграждане на знанията“, което е дефинирано в (Ganchev, et al., 2009b).

В статия със заглавие “Principles of Learning and Teaching Mathematics, with Particular Reference to the Learning and Teaching of Linear Algebra: Old and New observations”, представена в (Dorrier, 2000) и цитирана в (Dorrier, 2002), Харел предлага три принципа и ги формулира като основни при преподаването на линейна алгебра:

- Принцип на конкретност: за да могат студентите да разберат абстрактен модел на дадена структура, те трябва да познават елементите на този модел в детайли, т.е. те трябва да могат да използват обектите от този модел като входни данни;
- Принцип на необходимост: студентите трябва да изпитват интелектуална необходимост да получат знанията, които им се преподават;
- Принцип на обобщеност: преподаването на конкретни знания и даването на частни примери трябва да позволяват свързване с други знания и примери, от което да се получи обобщаване и систематизиране.

Ако тези принципи трябва да бъдат спазени, очевидно трябва да се спази и принципът на стъпаловидно натрупване на знанията, като се стъпи на опита на студентите, който те са натрупали от гимназиалното си образование. Това означава, че трябва да бъдат

използвани познати за тях обекти, на базата на които да бъдат формулирани нови проблеми, които, от своя страна, са решими с апарата на линейната алгебра. Накрая, но не на последно място, решенията на тези нови проблеми трябва да бъдат обобщавани по индуктивен път до нови фундаментални и често пъти абстрактни знания – теореми. Този подход в обучението по-линейна алгебра е по-скоро сходен с утвърдения традиционен, а не с предложения от Франк Ухлиг.

В България има изградена дългогодишна традиция в обучението по линейна алгебра. На първо място трябва да се спомене, че във висшите училища в България стандартно се държи много повече на теоретичните знания, отколкото в западните държави, където прагматизмът налага по-засилен фокус върху практическото приложение на науката. Обучението по линейна алгебра не прави изключение. В повечето университети в България изпитът по линейна алгебра не може да бъде взет без „развиване на теоретични въпроси“, т.е. възпроизвеждане на дефиниции, формулиране на теореми и доказването им. В университетите в Западна Европа и САЩ при оценяване на знанията от теорията обикновено се използват тестове, в които не се изисква изчерпателно и систематизирано изложение на цели теми от курса, а по-скоро се изисква даване на отговори на конкретни въпроси от по-важните части на тези теми. В този смисъл може да се твърди, че изискванията за наличие на знания от теорията (това, което в англоезичната литература често споменават като „концепции“) в България са значително по-високи от тези в западните държави. От друга страна, в България традиционно се наблюдава един негативен ефект от страна на студентите за наизустяване на дефиниции, формулировки на теореми, а понякога дори и на цели доказателства, без самите те да са разбрани. Това е и една от основните трудности за поставяне на обективна оценка.

Що се отнася до учебните планове по линейна алгебра, в България се наблюдават известни, но малки различия в концепциите на различните университети. В Софийския университет „Св. Климент Охридски“ са налице определени реформи през последните години. Например в конспектите (Учебни материали на катедра „Алгебра“ СУ, 2012) по специалности „Математика“, „Математика и информатика“, „Информатика“ и „Приложна математика“ може да се наблюдават следните учебни планове:

- Според конспектите преди 2010 г. курсовете започват с решаване на детерминанти от 2-ри, 3-ти и n -ти ред. Следват формули на Крамер за решаване на системи от линейни уравнения. След това се въвеждат матрици, операции с матрици, обратни матрици и матрични уравнения. Следват n -мерни векторни пространства, линейна зависимост и независимост на вектори, ранг на система вектори и чак тогава се въвежда метод на Гаус-Жордан за решаване на системи от линейни уравнения. След това се въвеждат линейни пространства, базиси, смяна на базис, подпространства и системи от хомогенни линейни уравнения. В края на курса се въвеждат линейни изображения, ранг и дефект, линейни оператори и курсът завършва със собствени стойности и собствени вектори на линеен оператор. Само в специалност „Математика“ допълнително се разглеждат Евклидови пространства, метод на Грам-Шмид за намиране на ортогонален базис и симетрични оператори;

- След 2010 г. решаването на задачи от Евклидови пространства и метод на Грам-Шмид се изучават във всички специалности;
- След 2010 г. се наблюдава следната реорганизация на курса в специалност „Математика“ – той започва с решаване на системи от линейни уравнения по метода на Гаус-Жордан. Следва изучаване на матрици, операции с матрици, обратни матрици и матрични уравнения. Чак тогава се въвеждат детерминанти, непосредствено след които и формули на Крамер. От там нататък курсът продължава с линейни пространства, линейна зависимост на вектори, базиси, смяна на базис, суми на подпространства, ранг на система вектори, ранг на матрица и хомогенни системи от линейни уравнения. Следващият голям раздел е за линейни изображения, изоморфизъм на линейни пространства, ранг и дефект, собствени стойности, диагонализация на оператор с прост спектър. Курсовете завършват с Евклидови пространства, ортогонализация по метода на Грам-Шмид и диагонализация на симетрични оператори и матрици;
- В специалност „Информатика“ през учебната 2011-2012 г. се наблюдава реорганизация, в която темата за „ n -мерни векторни пространства, линейна зависимост и независимост“ е въведена като встъпителна за курса. От там нататък курсът продължава така, както по стария конспект.

Във Физически факултет на Софийския университет „Св. Климент Охридски“ след 2010 г. за специалности „Обща физика“, „Инженерна физика“, „Ядрени технологии и енергетика“ и „Физика и математика“ се използва последователността на темите от реформирания конспект на специалност „Математика“, като там трябва все пак да се отбележи, че учебният предмет е смесен – „Линейна алгебра и аналитична геометрия“. В други факултети на Софийския университет също се изучава линейна алгебра, но обикновено предметът е значително по-„олекотен“ и основно се набляга на практическото решаване на задачи, свързани с операции с матрици, детерминанти и системи от линейни уравнения. Такава например е практиката в Биологически факултет. Там теми от линейни пространства и линейни оператори се засягат само частично и обикновено без доказателства на теоремите.

Подобна на Факултета по математика и информатика на Софийския университет е и методиката в Югозападен университет „Неофит Рилски“ в Благоевград, но със съществена разлика, че курсът не започва със системи от линейни уравнения, а те се въвеждат по-късно. В учебника по линейна алгебра (Борисов, и др., 2009) от 2009 г. темите следват следната хронология: матрици, действия с матрици, детерминанти, обратна матрица, n -мерно векторно пространство, ранг на матрица, системи от линейни уравнения (теорема на Руше, метод на Гаус, хомогенни системи), линейни пространства (размерност, базис, смяна на базис, изоморфизъм, директна сума на подпространства), линейни изображения, линейни оператори, ядро и дефект, образ и ранг на линейно изображение, характеристични корени и собствени вектори на линейен оператор, инвариантни подпространства, Евклидови и унитарни пространства, метод на Грам-Шмид за ортогонализация, детерминанта на Грам, линейни оператори в Евклидови и унитарни пространства, дуално пространство, спрегнат оператор, билинейни и

квадратични форми. Ръководството по линейна алгебра и аналитична геометрия (Борисов, и др., 1997) от 1997 г. показва, че темите от линейната алгебра следват същата хронология (само малка част от темите в учебника не присъстват в ръководството). Това показва наличие на устойчивост и традиция по този учебен предмет през годините. Впечатление, свързано с учебника (Борисов, и др., 2009), прави наличието на встъпителни теми от теорията на множествата и комбинаториката. Понякога се наблюдава липса на именно такива базови знания в студентите, което, от своя страна, води до чувство на безсилие у преподавателите, когато установят, че студентите не успяват да усвоят съвсем елементарни идеи и концепции. Последното мнение е подкрепено в (Dorrier, 2002), но пак там се подлага на съмнение, че изучаването на допълнителни теми от теория на множествата би помогнало съществено за усвояване на знания по линейна алгебра.

В Техническият университет – София, няма обособен предмет за линейна алгебра, а темите от него са вмъкнати в общ модул с няколко други математически дисциплини – учебните предмети, свързани с математика при повечето специалности са Висша математика с поредни номера 1, 2 и 3. Обикновено Висша математика 1 започва с поредица от теми, свързани с линейна алгебра – матрици и операции с матрици, детерминанти, обратна матрица, матрични уравнения, минори, ранг на матрица, системи от линейни уравнения (формули на Крамер и метод на Гаус) и системи от линейни хомогенни системи. Следва поредица от теми, свързани с диференциално и интегрално смятане (математически анализ). След това отново се изучават теми от линейната алгебра – линейни пространства, линейна зависимост и независимост на вектори, бази, размерност, координати на вектори и линейни оператори. Курсът по Висша математика 1 завършва с теми от аналитичната геометрия.

В Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, в специалност „Бизнес информационни технологии“, темите по линейна алгебра от курса по ЛААГ са подредени по следния начин: векторни пространства, матрици, действия с матрици (сбор и умножение с число), линейна зависимост и линейна независимост на системи от вектори, бази, размерност на векторно пространство, Евклидово векторно пространство, детерминанти, произведение на матрици, линейни преобразувания и техните матрици, обратими матрици, методи за намиране на обратна матрица, смяна на бази и координатни системи, изменение на матрицата на линейно преобразуване при смяна на базите, ранг на система от вектори и ранг на матрица, системи линейни уравнения – формули на Крамер, системи хомогенни линейни уравнения, метод на Гаус за решаване на системи линейни уравнения, матрични уравнения, собствени стойности и собствени вектори на линейно преобразуване, диагонализиране на матрица и линейно преобразуване. Впечатление прави значително по-късното въвеждане на системи от линейни уравнения спрямо учебните планове в другите университети.

В Университет за национално и световно стопанство, във факултет „Приложна математика и статистика“ през декември 2012 г. е утвърден нов учебен план за всички специалности. Математическите дисциплини се изучават в два модула, наречени „Математика 1“ и „Математика 2“. От особен интерес в този учебен план е, че темите от

Линейна алгебра НЕ са сред първите, които се изучават. „Математика 1“ започва първо с няколко теми, систематизирани в раздел „множества и функции“, след което се изучава раздел „аналитична геометрия“, последван от „диференциално смятане на функции на една променлива“, „диференциално смятане на функции на повече променливи“ и предметът завършва с теми от „интегрално смятане“. От това се вижда, че в първи курс – първи семестър, студентите въобще не изучават линейна алгебра, като евентуално само някои елементи от нея е вероятно да се застъпват в темите от аналитична геометрия. Линейна алгебра се изучава като първи раздел от учебния предмет „Математика 2“. Темите в раздела там са подредени по следния начин:

- Линейни пространства. Линейна зависимост и независимост. Размерност. Базис. Ранг на система вектори. Крайно-мерни линейни пространства. Единичен базис в пространството R^n ;
- Матрици. Матрични модели в икономическата наука. Линейни статични икономически модели. Модел “разходи-производство” – матрична формулировка и др.;
- Системи линейни уравнения. Общ метод на Гаус;
- Детерминанти. Основни свойства. Пресмятане. Формули на Крамер;
- Матрична алгебра. Действия с матрици. Обратна матрица. Матрични уравнения. Еквивалентни преобразувания на матрица. Метод на Гаус-Жордан за решаване на матрични уравнения и намиране на обратна матрица;
- Ранг на матрица и връзката му с ранга на системата вектори. Теорема на Руше-Кронекер-Капели.

В предмета „Математика 2“ – непосредствено след „Линейна алгебра“, се изучава „Линейно оптимиране“, след което се завършва с „Теория на вероятностите“.

От разгледаното до тук е ясно, че практиката в България не се различава прекалено много от тази, която е утвърдена в повечето университети в САЩ. В последните години и в България е приета тенденцията за намаляване на изучаването на детерминанти и техните свойства, за сметка на по-задълбочено изучаване на други теми от предмета. Очевидно, в разгледаните конспекти почти навсякъде липсват теми за „блочни матрици“, „LU декомпозиции“ и „блочни LDU декомпозиции“, които, от своя страна, присъстват в повечето от учебните програми в САЩ. За сметка на това може спокойно да се твърди, че някои от темите са много по-сериозно разгледани в дълбочина – такава например е темата за „детерминанти от n -ти ред“.

В Университета по архитектура, строителство и геодезия при курса по линейна алгебра, воден от проф. д-р Михаил Константинов, се наблюдава значителна разлика спрямо практиката в останалите университети в България. Прави впечатление, че се обръща специално внимание на използването на числени методи. Конспектът по учебната дисциплина там е следният:

- Вектори – определения, операции с вектори, скаларно произведение и норма, абстрактно векторно пространство, линейни оператори, афинно пространство;

- Матрици – определения, стандартни операции с матрици, обратни матрици, норми на матрица, други матрични произведения, матрица на линеен оператор;
- Детерминанти и перманенти – определения и свойства, явни изрази, минори;
- Подпространства и линейни многообразия – определения, действия с подпространства, фундаментални подпространства на матрица;
- Линейна зависимост на вектори – определения и примери, ранг, размерност и база;
- Елементарни трансформации (ЕТ) на матрица – определения, матрично представяне, привеждане на матрица в ешелонна канонична форма относно ЕТ;
- Ортогонални и унитарни матрици – определения и свойства, ортогонално- и унитарно-инвариантни норми;
- Елементарни ортогонални и унитарни трансформации – определения, ротации на Гивънс и отражения на Хаусхолдер, привеждане на вектор и матрица в ешелонна канонична форма относно ортогоналните (унитарните) трансформации;
- Ортогонално-триъгълна декомпозиция (QRD) и ортогонално-диагонално-ортогонална декомпозиция (SVD) на матрица – определения и свойства, съществуване на декомпозициите, псевдообратна матрица на Мур-Пенроуз;
- Линейни векторни уравнения (ЛВУ) – определение; съществуване и единственост на решението; представяне на решението;
- Числено решаване на ЛВУ – метод на елементарните трансформации (елиминационен метод на Гаус), метод на ортогоналните (унитарните) декомпозиции, итерационно уточняване на решението;
- Задача за най-малки квадрати (ЗНМК) – определения, геометрична интерпретация, представяне на решението, решаване чрез ортогонални декомпозиции, приложения;
- Чувствителност на решенията на ЛВУ и ЗНМК – постановка на задачата, число на обусловеност на матрица, явни изрази за смущението в решенията;
- Линейни матрични уравнения – определения; съществуване, единственост и представяне на решението; уравнения на Сивестър и Ляпунов, числено решаване;
- Собствена структура и форма на Жордан на квадратна матрица – определения и свойства, подобни матрици, квазижорданови форми;
- Форма на Шур на квадратна матрица – определение, съществуване, итерационно пресмятане (QR метод);
- Собствена структура и форма на Кронекер на двойка матрици – определения и свойства, подобни двойки;
- Обобщена форма на Шур на двойка матрици – определение, съществуване, итерационно пресмятане (QZ метод);
- Нормални матрици – определения и свойства, мярка за нормалност;
- Итерационни методи за големи ЛВУ – определения, основни итерационни схеми, сходимост;
- Матрични функции – определения и свойства, пресмятане с помощта на матричен ред, основни матрични функции, апроксимации на Паде.

Учебникът, който се препоръчва за учебната дисциплина в УАСГ, е (Константинов, 2000). Очевидна е силно практическата насоченост на изготвения курс, като в лабораторните упражнения активно се използва компютърна техника. Програмата изглежда повлияна от прагматизма и насочва студентите към практически полезни методи за решаване на реални задачи. Доколко (и дали) това влияе на разбирането на основните концепции на науката, би могло да се изследва допълнително.

В (Cowen, 1997) се препоръчва да не бъде оставяно мнение у студентите, че намирането на корените на характеристичен полином е единственият начин за намиране на собствени стойности на матрица, а да им се показва, че съществуват и числени методи за намирането им. Трябва да се отбележи обаче, че това не означава автоматично, че „практически неефективните методи“ за решаване на дадени задачи трябва да отпаднат от учебните програми напълно, каквато тенденция се наблюдава в курса, воден от проф. Константинов. Казва се, че знанията по линейна алгебра не се изучават единствено, за да могат да се решават практически задачи, а така също те са нужни, за да се формира математическо мислене и усет към доказване на теореми и към систематизиране на теоретични знания. Понякога този усет се добива по-лесно чрез методи, в които студентите могат да решат задачите самостоятелно на лист хартия, а не чрез методи, които поради сложността си изискват наличие на компютър. Също така, за да бъде приета подобна промяна в учебните планове, трябва да бъде изследвано доколко подобни знания, традиционни за предмета „Числени методи“, са достъпни в толкова ранен етап от университетското обучение. Във Факултет по математика и информатика на Софийския университет „Св. Климент Охридски“ предметът „Числени методи“ обикновено се изучава във втори курс, втори семестър. В Югозападен университет „Неофит Рилски“ предметът се поставя в трети курс, първи семестър. Това са цели две учебни години разлика с времето, по което се преподава линейна алгебра.

1.8. Изводи към Глава 1

С оглед постигане на дефинираната цел – на базата направения литературен преглед в глава 1, са формулирани следните основни изводи:

- Спазването на основните дидактически принципи е напълно задължително, независимо от формата на обучение, която се прилага в експеримента;
- Особено внимание за обучението по линейна алгебра трябва да бъде обърнато на съблюдаването на дидактическите принципи на активност, съзнателност и достъпност, защото очакванията са, че именно те ще бъдат проблемни за този конкретен учебен предмет;
- Няма неотложна причина да бъде експериментирано с промяна на стандартната структура на провеждане на обучението чрез поредица от лекции и упражнения или да бъде търсена алтернативна основна форма на обучение;
- Добре е да бъде засилена практическата насоченост в обучението по линейна алгебра, като бъдат подбрани подходящи задачи с практически примери;

- Интерактивни методи за обучение по време на семинарни упражнения би трябвало да повишат мотивацията на студентите;
- При провеждане на експеримента трябва да бъдат отчитани психологическите особености на студентите;
- Учебната програма по линейна алгебра в Югозападен Университет „Неофит Рилски“ напълно покрива добрите практики за традиционен курс по този учебен предмет.

Относно Бел-Ланкастърската система на обучение са отчетени следните основни предимства спрямо други алтернативи:

- Обучението на големи групи от студенти по време на лекции е по-хабилитиран труд спрямо обучението на по-малки групи поотделно, което прави системата икономически ефективна;
- Големите аудиторни зали имат позитивен психологически ефект при обучаемите;
- Предлага по-лесен достъп на повече студенти до по-добрите преподаватели;
- Помага се активно на хората, които са способни да учат чрез слушане.

Основните недостатъци на Бел-Ланкастърската система на обучение са:

- Ученето по време на лекции е предимно пасивно;
- Лекциите не предполагат прилагане на дидактическия принцип за индивидуален подход.

Недостатъците на Бел-Ланкастърската система следва да бъдат компенсирани чрез по-активно участие на студентите по време на семинарните упражнения и процеса на самоподготовка.

ГЛАВА 2. АНАЛИЗ НА СРЕДСТВА ЗА ТЕХНОЛОГИЧНО-ПОДПОМОГНАТО ОБУЧЕНИЕ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА

2.1. Уеб 2.0 обучение

В последното десетилетие компютърната техника и Интернет навлязоха трайно в ежедневието на хората. Вече все по-рядко се срещат млади хора, които не са „в крак“ с новите технологии при персоналните компютри и лаптопи. В последните няколко години масово започнаха да се използват и мобилни устройства като смартфони, таблети и нетбуци, които дават още по-лесен достъп до световната мрежа отвсякъде и по всяко време. Цялата тази техника, заедно със съпътстващите я софтуерни технологии, би могла да бъде употребена и „въвлечена“ като допълнително помощно средство към учебния процес в училищата и университетите.

2.1.1. Развитието на технологиите до достигане на понятието „Уеб 2.0 обучение“

Още в зората си компютърната техника е била използвана за целите на обучението. Уеб базираното обучение (March, 1996) обаче води до първата голяма стъпка за качествен преход към един съвсем нов тип преподаване – дистанционното обучение с помощта на компютърна техника, което допълва или дори в известни граници успява да замени присъственото. В (Moore, 2003) се дава следната дефиниция за това обучение: *“всички форми на обучение, при които всички или повечето преподавателски дейности се провеждат в различно пространство от дейностите за учене, като резултатът от това е, че цялата или по-голямата част от комуникацията между преподаватели и ученици се извършва чрез комуникационни технологии”*. Най-често обаче компютърните технологии получават употреба в т.нар. „смесена форма на обучение“ (blended learning), където електронното обучение (и Уеб базираното обучение в частност) допълва и обогатява традиционната форма. Подобно мнение е изказано в (Дурева, 2010).

Основни предимства на уеб базираното обучение са описани подробно в (Aggarwal, 2003). Освен неизброимите сайтове, които се създават за решаване на определен учебен проблем за специализиран курс, с времето са създадени и редица софтуерни системи за управление на процеса на обучение и управление на учебното съдържание (LCMS) като Moodle (Тупаров, и др., 2008), Ilias (Тупаров, и др., 2008), aTutor (Тупаров, и др., 2008), Claroline (Тупаров, и др., 2008), Edmodo (Yee, et al., 2012), BlackBoard (Bradford, et al., 2007), COSE (Stiles, 2000), IPSS_EE (Mileva, et al., 2003) и др. В България също са отбелязани частични успехи в разработката на софтуер за управление на учебно съдържание като например „Интернет базирана среда за разработка на диалогово-обучаващи програми“ (Петров, и др., 2009), както и редица проекти като PeU (Тотков, и др., 2005), BEST (Тотков, и др., 2006), ARCADE (Bontchev, et al., 2003), eLearning Shell (eLSe) (Hristov, 2006), Архитектура за еОбучение (Шойкова, и др., 2005), и др. В (Върбанова-Денчева, 2012) са изброени 20 български университета и са показани платформите за електронно обучение, които са приети за общо ползване в тях. Най-често използваната платформа безспорно е Moodle, но прави впечатление, че много университети експериментират и внедряват (макар и най-често неуспешно) свои

собствени системи. Това се прави както на университетско ниво, така и на равнище факултети. Разбира се, това често се прави и като експеримент само за отделни учебни предмети.

Може спокойно да се твърди, че уеб базираното обучение си поставя за цел да създава електронен модел на традиционните форми на обучение, а именно – фронтална, групова и индивидуална, чието описание може да бъде намерено в (Тодорина, 2011). Това моделиране се постига основно чрез два вида интерактивно взаимодействие – комуникация от типа „субект-компютър“ и комуникация от типа „субект-субект“, като тя може да е с директна (peer to peer) или с компютър в ролята на посредник. Последното в (Тупарова, 2007) е описано като „човек-компютър-човек“. Често срещан недостатък в практиката при разработката на интерактивни софтуерни продукти за обучение е, че споменатите видове комуникация рядко се интегрират помежду си в общ обучителен ресурс. Дори при използването на интерактивни софтуерни продукти, поднесени чрез популярни среди за управление на учебно съдържание като Moodle, често се забелязва, че модулите за контакт на обучаем с преподавател или връзка на обучаем с други обучаеми са изнесени отделно от учебните материали – преподавателите ги използват като допълнения на процеса на обучение, но не ги интегрират вътре в самия него. От друга страна практиката показва, че именно субект-субектните взаимоотношения са незаменима и неделима част от процеса на обучение и съответно електронен модел на присъственото обучение не може да бъде пълноценен без тях.

Същите наблюдения – за непълноценна употреба на модулите за субект-субектна комуникация, са направени от редица автори не само в сферата на обучението, но и за електронната търговия, за корпоративни сайтове и др. Това довежда до нуждата от по-ясна теоретична обосновка при моделиране на подобни системи, която да дефинира ясно целите пред разработчиците на софтуер. Така пък постепенно се дефинира термина „Уеб 2.0“ (Musser, et al., 2006), (Rahnev, et al., 2007), (Governor, et al., 2009). Чрез него се цели да се постави фокус именно върху интегрирането на двата типа комуникация в едно цяло. Например „форумът“ на един новинарски портал вече не е просто отделен ресурс, чийто достъп се осигурява чрез отделна връзка от менюто на сайта - в уеб 2.0 той трябва да е тясно свързан с останалите услуги. Подобни предизвикателства следва да се поставят и в процеса на електронното обучение! Така се заражда терминът „Уеб 2.0 обучение“.

Уеб 2.0 обучение според (Петров, 2010) се осъществява чрез *„електронен ресурс в Интернет, който е интерактивен носител на учебна информация, поднесена във вид на текст, графики, видео и друга мултимедия, в който обучаемите обменят опит помежду си и допълват учебните материали, водейки дискусии под различна форма с учителя и/или помежду си“*. Дадена по този начин, дефиницията ясно подсказва на разработчиците на софтуер, че фокусът на тяхната работа трябва да бъде насочен именно към интеграция на дискусията (във всичките ѝ възможни форми) вътре в учебното съдържание. По този начин ще бъде получен завършен продукт, който моделира традиционния учебен процес възможно най-точно, според наличните технологични средства. Специално е отбелязано, че е възможно учениците да допълват учебното съдържание, а не само да се възползват от готово такова!

Погрешно е често срещаното в практиката схващане, че в „Уеб базираното обучение“ няма субект-субектна комуникация, а в „Уеб 2.0 обучението“ има. Воденето на дискусии под различна форма в Интернет не е никаква новост от последните години. Една от първите среди за комуникация – форумите – първоначално са били проектирани именно за обмен на научна информация между студенти в университетските мрежи, при това още преди създаването на Интернет. Разликата между Уеб и Уеб 2.0 обучението не е наличието или отсъствието на комуникация с преподавател или между обучаеми, а е интегрирането на тази субект-субектна комуникация като неделима част от учебния материал.

2.1.2. Класификация на видовете субект-субектна комуникация

В обучението от много важно практическо значение е „позицията на преподавателя“, т.е. дали той е водеща (ръководна) фигура в процеса на субект-субектни взаимоотношения или има само контролни функции за спазване на основните правила в комуникацията. В процеса на обучение, независимо под каква форма, може лесно да се обособят две основни групи субекти – преподаватели и обучаеми. Традиционно преподавателят е един, а групата от обучаеми е от много хора, но това не е правило, което задължително трябва се спазва. Именно затова преподавателите ще бъдат разгледани като група. Отношенията между двете групи силно зависят от типа на комуникация:

- Тип 1:1 – много подходящ за модел на индивидуалната форма на обучение:
 - Преподавател дава индивидуална помощ на обучаем (двупосочно взаимодействие между групата на учителите с групата на учениците);
 - Двама обучаеми обменят опит и информация помежду си (вътрешно взаимодействие в групата на обучаемите).
- Тип 1:М – един (или малка група) от участниците в комуникацията е изявен лидер. Той поднася учебно съдържание, а останалите участници го обсъждат, коментират и допълват. Обикновено водещия участник в дискусията е преподавателят, но не е изключено да се направят модели на вътрешно взаимодействие в групата на обучаемите, в което един или подгрупа от тях обучават останалата част от групата.
- Тип М:М – водене на дискусия без силно изразен лидер, т.е. всички участници имат относително равноправно участие. В този тип комуникация обикновено ролята на преподавателя е само да съблюдава основните правила за провеждане на нормална дискусия, както и евентуално да коригира авторитетно откровено невярна информация, когато такава масово е приета за вярна. Активното включване на преподавателя в такива дискусии обикновено изкривява комуникацията към тип 1:М, защото авторитетът му носи психологично въздействие в обучаемите.

Отделно и независимо от изброените по-горе варианти е възможно видовете комуникация да се разделят най-общо на два класа, описани в (Тупаров, и др., 2008):

- Синхронна – провежда се „на живо“, т.е. при едновременно участие на всички страни в комуникационния канал. Синхронната комуникация е най-подходяща и най-ценна тогава, когато тя е интегрирана в път на програмирано обучение. Например, когато

обучаемият изпитва затруднение да намери подходящ източник на информация на точно определена стъпка, по средата на решаването на задача, или се нуждае от помощ, която не е налична в средата на обучение, то е подходящо синхронно да се включи в комуникативен канал с преподавател или с други обучаеми. Така той ще потърси помощ „на момента“ и обучителният процес не се прекъсва за неопределено време;

- Асинхронна – информацията се предава и се запазва (временно или перманентно), като ответната страна я достъпва и допълва впоследствие. Асинхронната комуникация е по-подходяща тогава, когато натрупаните през учебния процес знания трябва да се синтезират и обобщят. Това означава, че тя е последваща програмираното обучение и се явява във формата на дискусия, в която обучаемите споделят своя опит от пътя, по който са преминали. Асинхронната комуникация предполага повече време за осмисляне на поднесената от другите потребители информация, съответно при нея се достига до по-сериозно затвърждаване на знанията. Също така тя предполага значително по-сериозен анализ, което, от своя страна, дава възможност за провеждане на дискусии по по-трудни и по-сложни въпроси.

Трябва да се отбележи, че и двата типа (синхронна и асинхронна) субект-субектна комуникация имат своето място в Уеб 2.0 обучението. Дори при асинхронната комуникация е важно всички ресурси за провеждане на дискусия, независимо от кой тип са те, да бъдат тясно обвързани в учебното съдържание, както и самото учебно съдържание да съдържа препратки към вече дискутирани въпроси.

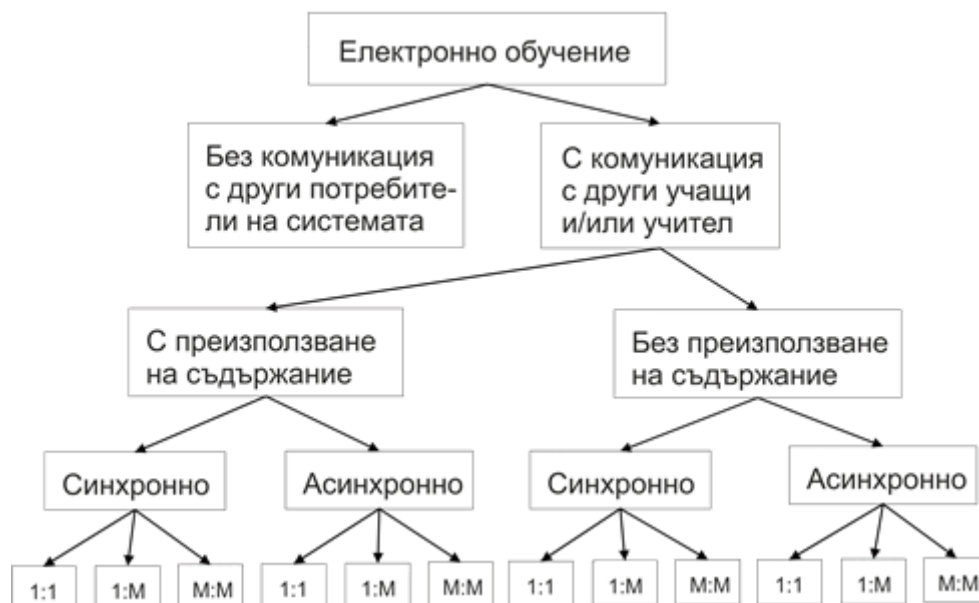
Друго независимо разделяне на типовете комуникация може да бъде следното:

- С преизползване на информация – натрупаните знания по време на комуникацията се записват и остават налични за употреба от бъдещи ползватели на учебната среда;
- Без преизползване на информация – информацията от комуникацията не се записва и не се използва от бъдещи ползватели на учебната среда или на средата за електронно обучение.

Обикновено е прието асинхронните методи за комуникация (например блогове, форуми и др.) да са тези, които преизползват информация, и обратно – при синхронните методи за комуникация (например чат, IM, и др.) обикновено не се преизползва информация. Това е наложено често в практиката, но не е задължително правило! Всъщност има много полезни изключения. Например преподавателите могат да записват въпросите на обучаемите, получени чрез синхронна комуникация, и впоследствие, на базата на тях, да коригират учебното съдържание. Стремешът за преизползване на натрупана от субект-субектна комуникация информация би следвало да е основен фокус на авторите на учебно съдържание – с цел обогатяване на учебното съдържание за бъдещи групи от обучаеми.

На фигура 2 е предложена класификация на видовете комуникация в електронното обучение. Всяко едно от „листата на десния клон“ на моделираното дърво е различна

технология за субект-субектна комуникация, която може да се интегрира в процеса на обучение по различен начин и да се използва за постигането на различни цели.



Фигура 2: Видове комуникация в Уеб 2.0 обучението

2.1.3. Специфични проблеми на Уеб 2.0 обучението по математика

Всеки учебен предмет, а дори и всяка отделна част от учебен предмет, може да има свои специфични изисквания към технологиите, които се използват в електронното обучение. В математиката традиционен проблем е въвеждането и изобразяването на математически фигури, оператори, знаци и символи, които не са тривиално налични на стандартната компютърна клавиатура.

В (Петров, 2011) са разгледани 13 различни технологични средства за въвеждане и изобразяване на математически формули в Уеб 2.0 приложения. В статията е изказано мнение, че един от водещите продукти в сферата е MathJax (MathJax 2.0, 2012), който позволява въвеждането на формули както на Latex, така и на MathML. На 26 февруари 2012 г. е излязла версия 2.0 на този софтуерен продукт, в която не само се решават редица проблеми с бързодействието, но и се добавят нови функционалности – като например възможност за писане на опростения език AsciiMath. Още преди излизането на подобренията версия в (Петров, 2011) е изразено мнение, че технологично това е най-добрият наличен продукт, при това е безплатен.

Въпреки, че технологиите се развиват непрекъснато, все още има един нерешен проблем – как обучаемите да могат да се научат да използват тези технологии, без това да изисква специализирано допълнително обучение. В частност, за математиката това е предизвикателството да се създаде технология за въвеждане на математически текст в комуникационни канали, която да не изисква сериозен ресурс в обучение за самата нея (например умения за писане на формули на Latex). Целта ще бъде постигната именно тогава, когато Уеб 2.0 обучението по математика покаже по-висока ефективност от

гледна точка на „необходимо време за усвояване на даден учебен материал от страна на всеки един ученик“. Към настоящия момент технологиите са все още далеч от постигането на тази цел. Времето, което един ученик отделя за въвеждането в компютър на решение на задача от операции с матрици от линейна алгебра, например, е многократно повече спрямо времето, което ученикът отделя за решаването на същата задача на хартиен лист.

Обратно, като контрапример може да се даде наблюдението в сферата на информатиката, където написването на програмен код или създаването на структура за база от данни се постига значително по-бързо на компютър, отколкото върху лист хартия – в информатиката технологичните средства активно помагат на обучаемите да завършат тяхната задача и така самите ученици се чувстват много по-комфортно с тях, отколкото без тях. Същото може да се наблюдава и в писането на литературни есета и други стандартни текстове в електронни редактори: само в началните няколко текста учениците са значително по-бавни спрямо писането на ръка, а с натрупването на практически опит те бързо достигат до момента, в който пишат по-бързо на компютър, отколкото на хартия.

Именно тези наблюдения показват, че в сферата на математиката може да се желае много повече от страна на технологичните средства за въвеждане на математически текст. Все още наличните технологии не се доближават достатъчно добре до скоростта на писане на хартия, като това важи дори за хора със значителен практически опит.

Не на последно място трябва да се отбележи и неприятната тенденция средата за електронно обучение да фокусира обучаемите върху технологиите, вместо към решаването на реално поставената задача. При много първокурсници например може да се наблюдава следното: те решават поставените им задачи на хартия, а чак след това започват да преписват написаното в средата за електронно обучение. Това очевидно показва, че при тях тази среда се явява допълнителна задача, а не облекчаване на съществуващата.

Всички тези технологични проблеми се явяват сериозен праг пред осъществяването на напълно функционално Уеб 2.0 обучение по математика. Те трябва да се вземат предвид както от авторите на учебно съдържание сега, така и от разработчиците на софтуер в бъдеще. На базата на проведените наблюдения в (Петров, и др., 2013) са представени два практически примера за съвременни технологични средства за реализиране на Уеб 2.0 обучение по математика, които по предварително поставени критерии авторите считат за най-подходящи за провеждане на електронно обучение по математика на университетско ниво.

2.2.Диалогово-обучаващи програми

Диалогово-обучаващите програми са модел на програмирано обучение създаден в България. Главната им цел е да се осигури по-добра имитация на индивидуална работа на добър преподавател с обучаем. В основата на софтуерните продукти се залагат постижения на съвременната педагогика и методика на обучение без компютри.

Централно място между тези постижения заемат дидактическите принципи и особено принципите за индивидуален подход и за активност. Другата ръководна идея е разбирането, че в процеса на обучението обучаемият решава задачи не просто, за да бъдат решени, а за да се учи да ги решава самостоятелно или с помощ. При разработката на такива софтуерни продукти се поставя за цел спазването на основните учебни дейности от традиционните уроци, в частност и тези по математика (Ганчев, 1999).

2.2.1. Основни принципи на действие

Основна идея, която заляга в теорията на диалогово-обучаващите програми, е, че когато решаването на задачи се явява цел, а не помощно средство в обучението, компютърът трябва да е активен помощник на обучаемия, а не просто „решавач на задачи“ (Ганчев, и др., 1987а). Затова в диалогово-обучаващите програми се предвижда, на всяка стъпка от решаването на дадена задача, обучаемият да има възможност да използва помощ – тогава, когато не е сигурен в своите знания. Компютърът, от своя страна, трябва да прави анализ на подаваните отговори и да дава специфична помощ при конкретни грешки, което е типично за адаптивните системи за обучение.

В диалогово-обучаващите програми всяка задача се „раздробява“ на подзадачи до такава степен, че всяка подзадача да може да бъде решена с един единствен отговор. Подзадачите се нареждат като върхове на граф от тип „дърво“, където коренът на дървото е началото на задачата (първа подзадача), а „листата“ на дървото са подзадачи, имащи смисъл на „последни“ на задачата (т.е. решението им води до крайното решение на цялата задача). Ребрата на графа представляват преходи от една подзадача към друга, като поредица от ребра, свързващи началото на дървото с някое от неговите листа, се нарича „път за решение на задачата“ (еквивалентно на „път за учене“). Това показва, че диалогово-обучаващите програми са модел за програмирано обучение, в което различните обучаеми вървят по свой индивидуален път, който се определя според техните отговори. Това също означава, че системата е адаптивна.

По всяко време на екрана на обучаемия се поднася информация в т.нар. „кадри“. Всяка една от подзадачите в дадена задача от диалогово-обучаващата програма се състои от четири основни компонента:

- Текст на подзадачата – дефиниция на подзадачата, която се визуализира в кадър с текст и/или мултимедия;
- Дидактически блок – кадър, в който обучаемият е поставен в позиция да вземе основно решение: да даде отговор на подзадачата или да използва помощ;
- Логически блок – компютърна обработка на подаден от обучаемия отговор: включва оценка за вярност или невярност на отговора, както и проверка за предвидена или непредвидена грешка (в случай, че отговорът е бил грешен);
- Сценарий – включва пренасочване на обучаемия към допълнителни помощни кадри, съдържащи един от следните компоненти: информация при поискана помощ, информация при подаден верен отговор, информация при подаден непредвиден грешен отговор, информация с помощ при подаден предвиден грешен отговор.

Помощите на подзадачите в диалогово-обучаващите програми се подреждат линейно (последователно една след друга), като обучаемият ги извиква само при лична нужда. След прочитането на кадър с дадена помощ се преминава обратно към кадъра с дидактически блок. При използване на всички предвидени помощи за дадена подзадача се преминава към кадър, в който се дава готово решение на подзадачата и се дава възможност на обучаемия да премине към следваща подзадача.

Достигането до верен отговор или изчерпването на всички налични помощи води до преминаване към следваща подзадача чрез преминаване към следващ връх по ребро от графа. Верните отговори за една подзадача може да са повече от един, като всеки различен отговор пренася обучаемия по различно ребро. Именно по този начин се получава „разклоняването“, даващо възможност за различни пътища на учене.

При подаване на грешен отговор от логическия блок се прави проверка за съвпадение с „предвиден грешен отговор“. Ако има съвпадение, обучаемият се пренасочва към допълнителен (специфичен) кадър с конкретна помощ за грешката, която той е допуснал. Тези помощи се задават предварително от автора на учебно съдържание за диалогово-обучаващата програма. Във всяка програма е редно да се пази статистика за подадените грешни отговори, които обучаемите са давали по време на работата с програмата. Тази статистическа информация се използва впоследствие за дообогатяване на програмата чрез добавяне на нови предвидени грешни отговори със съответна специфична помощ. Затова се приема, че разработката на една добра диалогово-обучаваща програма е непрекъснат процес на усъвършенстване, а не еднократно действие.

Независимо дали една диалогово-обучаваща програма ще бъде използвана с цел обучение, или с цел оценяване (изпит), практически важно е да се пази изчерпателна статистическа информация за всяко едно действие на обучаемите. В дадена подзадача има възможност да се използва един от три различни типа въпроси, които съответно изискват и различен тип отговор от обучаемия. Те са следните:

- Въпроси от закрит тип, изискващи „затворен отговор“ – на обучаемия се подават няколко възможни отговора (предварително зададени в системата), от които той трябва да избере верния. В този случай всички възможни грешни отговори са „предвидени“. Възможните верни отговори може да бъдат повече от един, като всеки от тях води по различен „път на учене“. В теорията е предвидена и възможност за такива задачи с „множествен избор“, където обучаемият може да избира комбинация от различни предоставени възможности за отговор, като всяка комбинация ги пренася по отделен път на учене;
- Въпроси от закрит тип, изискващи „отворен отговор“ – от гледна точка на разработчика, това е същото като 1., но от потребителска гледна точка възможните верни и грешни отговори не се извеждат в кадъра, а обучаемият трябва сам да въведе отговора си в обикновено текстово поле или специална форма. Въведените в системата възможни грешни отговори се наричат „предвидени“, а въвеждането от страна на обучаемия на какъвто и да е друг отговор (който не е „верен“) се нарича

„непредвидена грешка“. Възможните верни отговори отново могат да бъдат повече от един, като всеки от тях води до различен „път на учене“;

- Въпроси от отворен тип, изискващи „свободен отговор“ – обикновено имат приложение само в режим на „оценяване“. Изпитваният сам конструира отговора си чрез въвеждане на текст, без да е даден предварително шаблон, по който да работи. Този тип въпроси не предоставя възможност за употреба на логически блок, т.е. при тях компютърът не извършва проверка за вярност. Резултатите от такива задачи се записват в база от данни, а преподавател ги проверява и дава оценка за тях впоследствие. За да не се спира работата на обучаемия, докато тази оценка бъде направена, той бива прехвърлен „напред“ към нова подзадача автоматично след попълването на отговора си. Друга възможна област за приложение на такива подзадачи е даване на лично мнение от страна на ученика, например, ако подзадачата се явява като част от анкета, която е вмъкната вътре в учебното съдържание.

Класификацията за типове въпроси се припокрива с дадената в (Бижков, и др., 2007), като разлика има в терминологията за типовете отговор. В (Тупаров, и др., 2008) е дадено изчерпателно обобщение на вариантите за въпроси, както и техните характеристики. Теорията на диалогово-обучаващите програми припокрива голяма част от казаното там.

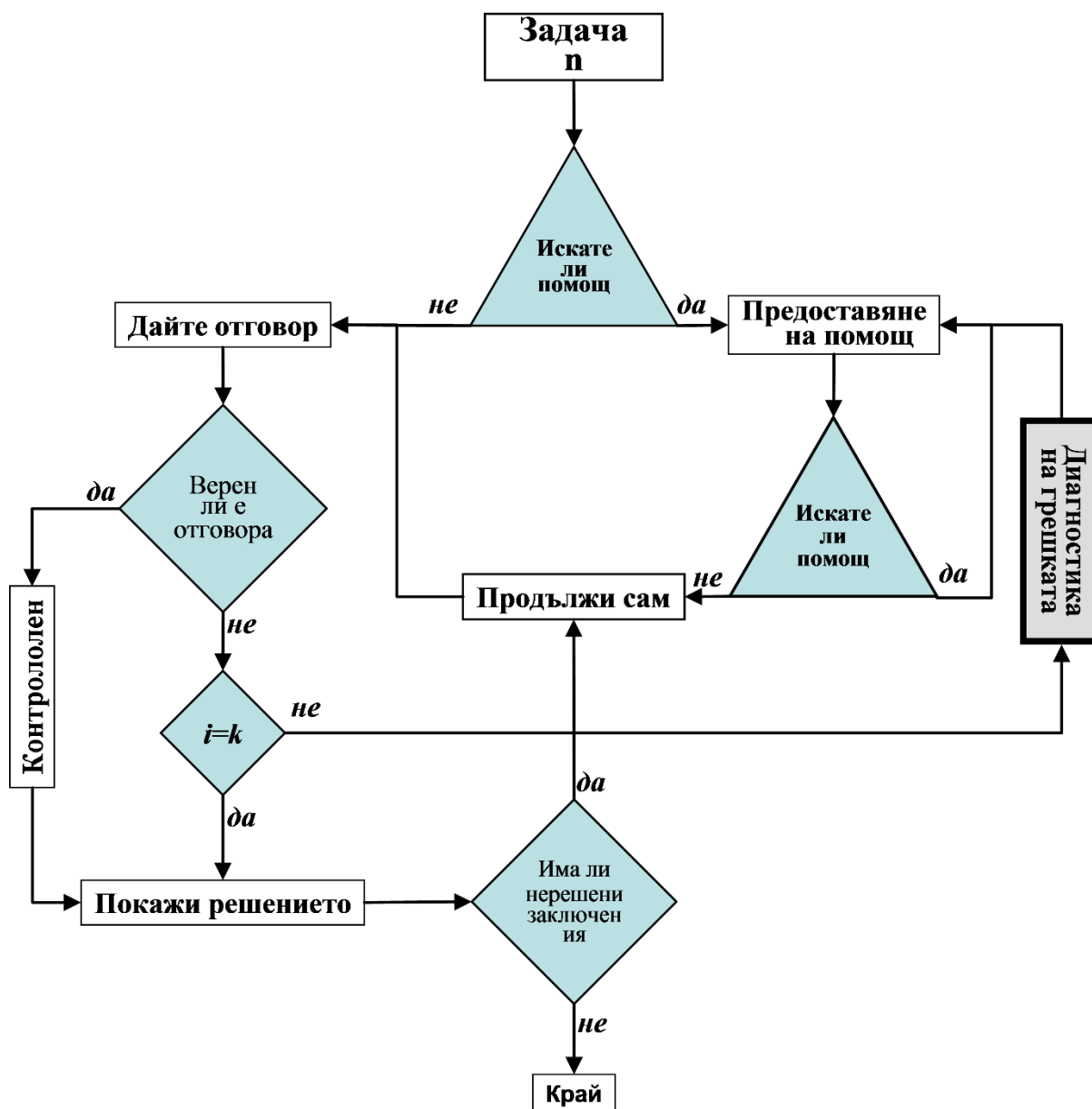
2.2.2. История на диалогово-обучаващите програми

България може да се похвали с това, че е един от пионерите в сферата на програмираното обучение. Още през 1984 г. проф. Иван Ганчев създава логическата схема за диалогово-обучаващи програми. На базата на тази схема е започнало разработването на приложен обучаващ софтуер на програмния език Basic за 8 битови компютри. През 1986-87 г. проф. Иван Ганчев създава дидактическа блок-схема с допълнителен елемент диагностика на грешка (фигура 3), а голяма част от теорията е представена в (Ганчев, и др., 1987а), (Ганчев, и др., 1987б), (Кучинов, и др., 1986) и (Кучинов, и др., 1987).

От 1990 г. до сега в магистърската програма „Технологии за обучение по математика и информатика“ в Софийски университет „Св. Климент Охридски“ се разработват диалогово-обучаващи програми. До 1999 г. всяка диалогово-обучаваща програма е била реализирана като самостоятелен приложен обучаващ софтуер, като за всяка една от тях се е пишел нов код. Тогава ас. Ридван Исуфов разработва вариант за въвеждане на съдържанието и връзките между кадрите на приложния софтуерен продукт Microsoft PowerPoint (Исуфов, 1999). През 2003 г. в (Исуфов, 2003) и (Исуфов, 2004) се предлага нов вариант на граф-схемата на проф. Ганчев, наречен „Логико-дидактическа блок-схема“. Подобрена нейна версия с повишена адаптивност, в която се включват понятията „предвидена грешка“ и „непредвидена грешка“, е предложена в (Petrov, et al., 2009). Тази логико-дидактическа блок-схема е представена на фигура 4.

В периода 2003-2008 г. в студентския курс се използва PowerPoint, но се оказва, че практическото приложение на такива диалогово-обучаващи програми остава силно ограничено понеже средата не предполага лесна възможност за блокиране на нерегламентирано „прескачане между кадри“, т.е. е трудно да бъдат предотвратени

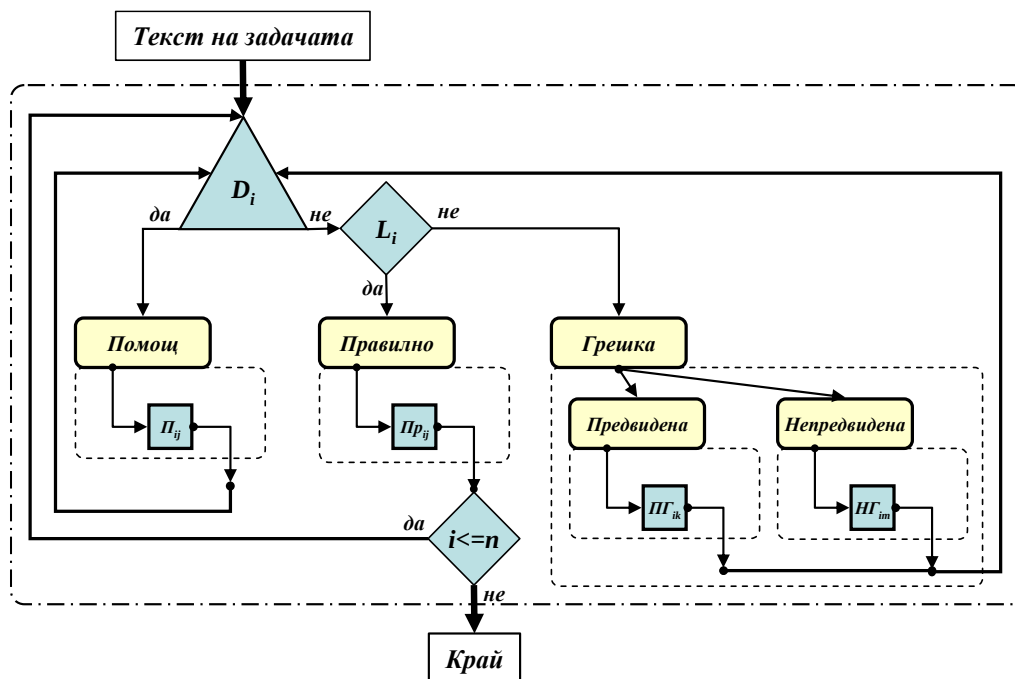
„измами“ от страна на обучаемите (преминаване от един връх в графа в друг, без да са извършени нужните дейности), когато програмата се използва за режим на оценяване.



Фигура 3. Дидактическа блок-схема на ДОП

Освен това се отчита, че, макар и опростено, писането на диалогово-обучаващи програми в PowerPoint все още изисква познания за програмиране на Visual Basic for applications, а това се явява затруднение за преподаватели, които нямат добра подготовка по информатика и информационни технологии. Това подтиква разработката на „Среда за разработване на диалогово-обучаващ софтуер“ през 2008 г., която впоследствие става основа за дипломна работа, защитена с отличие (Петров, 2008). Софтуерният продукт е уеб-базиран, написан на език за програмиране PHP и използва база от данни MySQL. Той позволява на преподаватели да разработват диалогово-обучаващи програми без да имат специализирани познания по програмиране и без да има нужда от инсталиране на допълнителен софтуер на техните работни компютри.

През 2009 г. студентът Александър Попов в магистърска степен на обучение в Софийския университет „Св. Климент Охридски“ разработва аналогичен софтуерен продукт, но написан на програмния език Java и не уеб-базиран (стартира се чрез изпълнение на файл на всеки отделен персонален компютър). Двете среди са представени в (Petrov, et al., 2009).



ЛЕГЕНДА

▲ – Дидактически блок, ◆ – Логически блок, ■ – Сценарий;

■ – Сценарии (Помощ, Правилно и Грешка);

□ – Действия, □ – Дейности;

n – брой на дейностите, i – дейности $i=1...n$;

D_i – Дидактически процес (Помощ, Отговор);

Помощ – предоставяне на възможност за помощ,

Отговор – предоставяне на възможност за въвеждане на отговор;

L_i – Логически процес (Верен или Грешен отговор);

j, k, m – брой на сценариите в дейността,

Сценарии за дейността:

P_{ij} – Помощ, Pr_{ij} – Правилно,

PG_{ik} – Предвидима грешка,

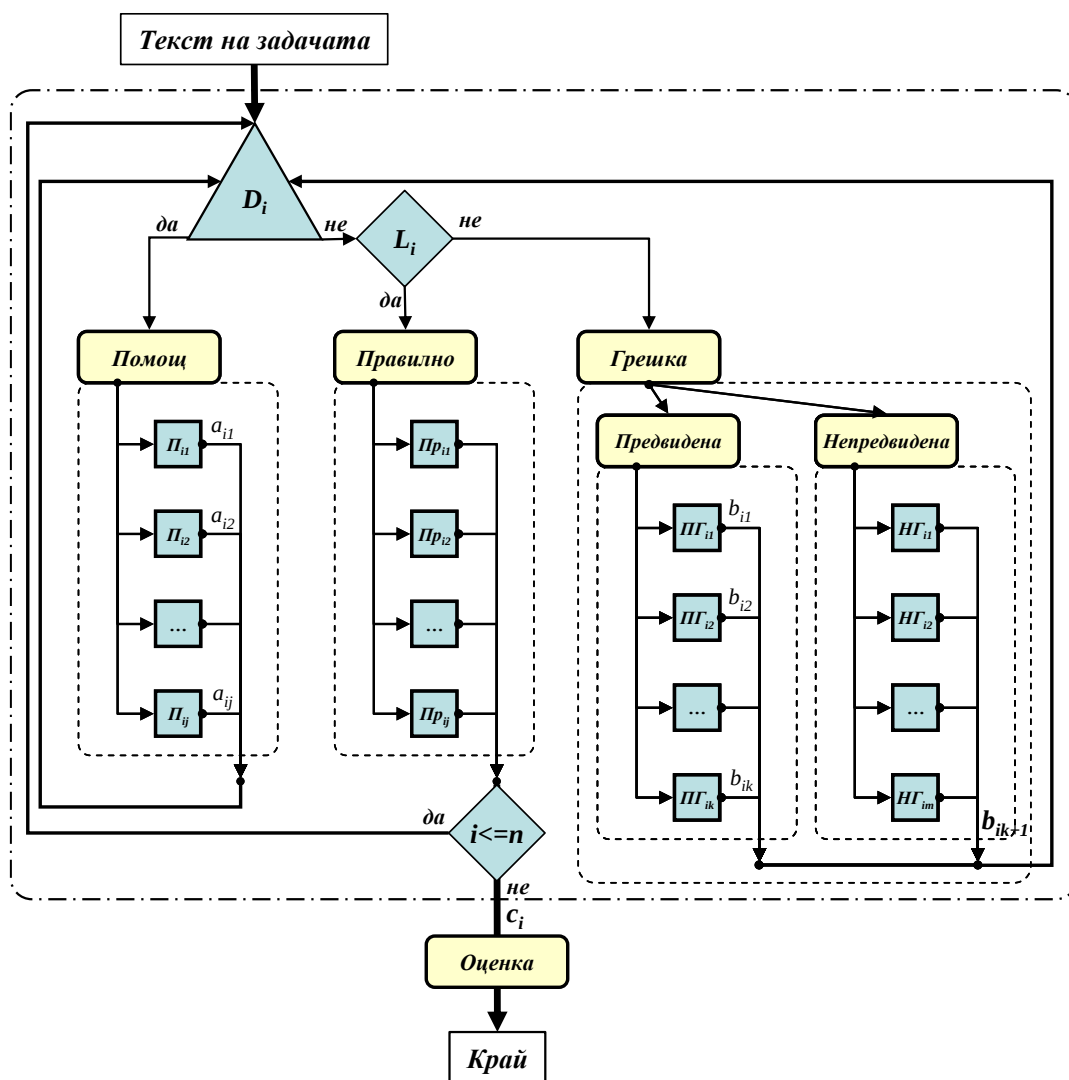
NG_{im} – Непредвидима грешка,

→ – Преход към сценарий;

→ – Преход към Дидактическия блок;

→ – Вход и изход от дейностите.

Фигура 4. Логико-дидактическа блок-схема на ДОП



ЛЕГЕНДА

▲ – Дидактически блок, ◆ – Логически блок, □ – Сценарий;

■ – Сценарии (Помощ, Правилно, Грешка и Оценка);

n – брой на дейностите, i – дейности $i=1 \dots n$,

D_i – Дидактически процес (Помощ, Отговор),

Помощ – предоставяне възможност за помощ,

Отговор – предоставяне възможност за въвеждане на отговор.

L_i – Логически процес (Верен или Грешен отговор);

k, m – брой на сценариите в дейността,

i – индекс за поредната дейност от задачата;

j – индекс за поредната използвана помощ.

Сценарии за дейността:

$П_{ij}$ – Помощ, Pr_{ij} – Правилно, $ПГ_{ik}$ – Предвидима грешка, $НГ_{im}$ – Непредвидима грешка;

→ – Преход към сценарий,

→ – Преход към Дидактическия блок,

→ – Вход и изход от дейностите;

a_{ij} – коефициент (брой точки) за поредна използвана помощ;

b_{im} – коефициент за конкретна предвидена грешка;

b_{im+1} – коефициент за непредвидена грешка;

c_i – положителен коефициент за дадена подзадача.

Фигура 5. Логико-дидактическа блок-схема на ДОП с елементи на оценяване

2.2.3. Съвременно развитие на теорията на диалогово-обучаващите програми

Освен създаването на уеб-базирана среда за разработка има още няколко основни приноса към развитието на теорията на диалогово-обучаващите програми в последните години. В (Петров, и др., 2009) за първи път е представена опростена схема за автоматично оценяване, която позволява диалогово-обучаващите програми да бъдат използвани не само за обучение, но и за изпитване. Тя е и практически интегрирана към преди това създадената среда за разработка. В (Petrov, et al., 2009) идеята за автоматично оценяване е доразвита и е предложена нова логико-дидактическа блок-схема с елементи на оценяване, представена на фигура 5.

Крайната оценка на даден ученик за конкретна задача се дава по следната формула:

$$P = \sum_{i=1}^n p_i$$

Където:

$$p_i = c_i - h_i - w_i$$

$$h_i = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}$$

$$w_i = \sum_{q=1}^{m+1} b_{iq} r_{iq}$$

P – общ брой натрупани точки по време на решението на задачата;

n – брой на подзадачите

p_i – брой точки натрупани за конкретната подзадача i . Ако **$p_i < 0$** то се приравнява на 0;

c_i – положителен коефициент (точки) за успешно завършена подзадача i ;

h_i – сума от натрупани негативни коефициенти от използвани помощи за подзадача i ;

w_i – сума от натрупани коефициенти от грешки за дадена подзадача;

a_{ij} – коефициент (брой точки) за поредна използвана помощ в подзадача i ;

b_{iq} – коефициент за конкретна предвидена грешка;

b_{im+1} – коефициент за непредвидена грешка;

r_{iq} – цяло число, което показва колко пъти е направена конкретна грешка;

q – индекс на поредна предвидена или непредвидена грешка;

k_i – брой на използваните поредни помощи в дадена подзадача;

m – брой на налични предвидени грешни отговори за дадена подзадача;

За всяка подзадача важи зависимост, според която, ако ученикът използва всички налични помощи в дадено действие, то той ще получи точно 0 точки за него, т.е.:

$$c_i = \sum_{j=1}^{l_i} a_{ij}, \text{ където } l_i \text{ е общия брой помощи за подзадача } i.$$

Ако Q е максималният възможен брой точки от всички подзадачи от задачата, т.е.:

$$Q = \sum_{i=1}^n c_i,$$

то крайната оценка O се получава като цяло число в интервала $[2, 6]$ по следната формула:

$$O = 2 + \frac{4P}{Q}$$

Критерият на оценяване зависи изключително много от коефициентите за грешка b_{iq} , които се контролират от преподавателя, съставляващ задачата. Те имат смисъл на „тежест на грешката“, т.е. авторът на учебното съдържание оценява коя предвидена грешка е „тежка“ и трябва да се отнемат повече точки и коя е по-маловажна и за която съответно той не би трябвало да отнема много точки. Преподавателят също така контролира „тежестта на подзадачите“, т.е. коефициентите c_i за това коя подзадача колко точки дава.

В (Isufov, et al., 2009) е представена систематизирана информация относно теорията на диалогово-обучаващите програми. Дадени са практически примери и насоки към разработчиците на обучителен софтуер и е систематизиран всичкият натрупан опит.

2.2.4. Връзка между диалогово-обучаващите програми и средите за управление на учебно съдържание

Сами по себе си диалогово-обучаващите програми се състоят от учебно съдържание и софтуер за управление на това учебно съдържание (поддръжката на графа и съответните пътища за учене, управлението на автоматичната оценка и т.н. се осъществява от софтуерен продукт). Присъстват само част от характеристиките на понятието „среда за управление на учебно съдържание“ (Learning Content Management System - LCMS) (Тупаров, и др., 2008), но в теорията за него липсват много от основните характеристики на LCMS. Такива са управлението на потребители, роли, права за достъп, учебни курсове, групи, учебни предмети и т.н. Средите за разработка – като например представената в (Петров, 2008), са тези, които биха могли да допълнят диалогово-обучаващите програми до LCMS. В този смисъл диалогово-обучаващите програми не са нито пълнофункционални LCMS, нито са обикновени носители на учебно съдържание.

Що се отнася до внедряването на диалогово-обучаващи програми в други съществуващи LCMS продукти – като например Moodle, aTutor, Ilias, Claroline (разгледани в (Тупаров, и др., 2008)), LAMS, проекти като българския BEST (Тотков, и др., 2006) и др., – интегрирането единствено на учебното съдържание на една диалогово-обучаваща програма в тях е безполезно, защото се губи управлението на структурата, автоматичното оценяване, логиката на помощите, логически и дидактически блок, т.е. учебното съдържание от диалогово-обучаваща програма не може тривиално да бъде вмъкнато във вид на учебни пакети (като например SCORM) и внедрено в различни LCMS. Тези LCMS системи нямат необходимите допълнителни модули за управление на

такова учебно съдържание. Това е огромен проблем за практическото приложение на диалогово-обучаващи програми. Съвременните версии на Moodle (2.3, 2.4.1 и евентуално по-новите в бъдеще) поддържат „пътища на учене“, а дори по-старите версии предлагат модули за автоматично оценяване, които покриват част от предложените в теорията на диалогово-обучаващите програми функционалности, но по същество имат сериозни разлики като модел и реализация. Поради тази причина се оказва, че ако трябва да се използва диалогово-обучаваща програма в съществуваща LCMS, трябва да се внедри цялата програма, заедно с програмния ѝ код като допълнителен модул (разширение) на тази LCMS, т.е. трябва съществуващата LCMS да бъде надстроена.

За щастие описаните в теорията на диалогово-обучаващите програми дейности са достатъчно независими от функционалностите, които липсват за изграждането на LCMS с възможности за управление на диалогово-обучаващи програми. Поради тази причина е възможно цяла диалогово-обучаваща програма (компилиран програмен код с интегрирани учебни материали) да бъде разгледана сама по себе си като учебно съдържание и да бъде добавена към съществуващ LCMS. Казано с други думи, възможно е да бъдат създавани диалогово-обучаващи програми чрез независим софтуерен продукт, да бъдат компилирани до изпълним код и след това прикачени като учебен ресурс в съществуващи LCMS среди. По този начин се разрешава проблемът с нуждата от допълнителни разширения към LCMS средите, както и с преносимостта на програмите. Разбира се, това е просто временно решение, с което могат да се интегрират съществуващи диалогово-обучаващи програми, защото по този начин се губи интеграцията със средата (например оценяването няма да се синхронизира автоматично). Истинското решение в бъдеще би било да се търси много по-тясна интеграция.

2.2.5. Диалогово-обучаващите програми и Уеб 2.0 обучението

Теорията на диалогово-обучаващите програми на този етап не предполага никаква субект-субектна комуникация, т.е. те са обикновени среди за програмирано обучение с интерактивно взаимодействие между ученик и компютър. За да може да бъдат внедрени в процес на Уеб 2.0 обучение, те трябва задължително да бъдат разширени и усъвършенствани. Предложени са два възможни подхода:

- Чрез употреба на съществуващи технологии за субект-субектна комуникация от LCMS система, в която диалогово-обучаващата програма е добавена като допълнителен учебен ресурс;
- Чрез усъвършенстване на теоретичния модел на диалогово-обучаващите програми така, че да предостави възможност за субект-субектна комуникация вътре в самите тях, чрез която при нужда да търсят помощ от преподавател.

Първият подход е възможен, но не дава пълна интеграция на каналите за субект-субектна комуникация с диалогово-обучаващата програма, защото модулите на LCMS не са тясно свързани с пътищата на учене в програмата. Вторият подход би дал една пълнота и би позволил на диалогово-обучаващите програми да предложат всички предимства на Уеб 2.0 обучението.

2.3. Специфики на електронното обучение по линейна алгебра

Преди да се пристъпи към проектиране на нов уеб базиран курс по даден учебен предмет е редно да бъдат разгледани най-добрите познати практики и да се прецени каква част от тях може да бъде използвана наготово. С оглед на поставената цел в настоящото изследване са представени следните критерии за оценка на образователни софтуерни продукти:

- Клас – дефинирани са три основни класа за оценка на продуктите. Това са продукт за решаване на задачи (S – solver), обучителен продукт (E – educational, който не просто дава решения на задачи, но показва и пътищата за достигане до тях) и продукт за програмирано обучение (P – programmed, чрез който обучаемите сами стъпка по стъпка достигат до решенията на задачите);
- Лиценз – предпочита се (но не е задължително) да бъдат използвани безплатни софтуерни продукти със свободен лиценз за ползване. Продуктите ще бъдат оценявани според три основни категории – безплатен лиценз (F – free), платен лиценз (P – paid) и забранен лиценз (C – closed, невъзможност софтуерния продукт да бъде копиран/клонирани извън домейна с уеб услугите на фирмата, която го предлага, като винаги се съпътства с допълнително уточняване дали все пак е свободен или платен, т.е. FC или PC);
- Уеб 2.0 интеграция – да бъде възможно софтуерния продукт да бъде интегриран в уеб форми, за да бъде постигнато ефективно обучение в Интернет. Възможните стойности за критерия за оценка ще бъдат три: възможна интеграция (Y – yes, което е предпочитана стойност), невъзможна интеграция (N – no, софтуерният продукт не може да бъде вграден в уеб сайт) и частична интеграция (P – partial, само отделни функционалности могат да бъдат използвани, което е приемлива стойност);
- Езикова локализация (I8n) – наличието на превод на български език или поне възможността на продукта да бъде превеждан на български език би следвало да се счита за голямо предимство, що се отнася до провеждане на обучение в българска образователна институция. Тук възможните стойности за оценка са две: *да*, има версия на български език (Y, което е предпочитана стойност), *не*, но е възможно да бъде преведен (P – possible, което е приемлива стойност) от страна на автора на учебно съдържание и *не* (N – не е предвидена възможност за превод);
- Инсталация при потребителя – нуждата от добавяне на допълнителни софтуерни продукти и модули, които не са налични по подразбиране на стандартна работна станция на потребителя (за такава приемаме стандартен персонален компютър/лаптоп с операционна система Microsoft Windows XP или по-нова) би затруднила студентите и би изисквала допълнително време за техническа помощ от страна на преподавателя. Възможните стойности за оценка са две: има нужда от инсталация (Y) или няма (N, което е предпочитана стойност);
- Нужда от обучение за работа със самия софтуер – това отново е субективен критерий, защото се базира на предварителна презумпция за нивото на компютърна грамотност на студентите от първи курс. По-конкретно ще се

предполага, че те са свикнали с ежедневна работа с персонален компютър под операционна система Microsoft Windows, имат поне основни знания за работа с текстови редактор и електронни таблици и активно използват Интернет за електронна поща, чат и социални мрежи. Не се очаква обучаемите да имат познания по програмиране (такива биха могли да бъдат очаквани за част от студентите в специалности Информатика и Компютърни системи и технологии, но дори за тях ще бъде прието, че нямат познания по програмиране, защото все още не са преминали успешно курс по „Увод в програмирането“ в университета). Възможните стойности за оценка са две: има нужда от допълнително обучение (Y) или няма (N, което е предпочитана стойност).

В някои случаи даден софтуерен продукт би отговарял на повече от един критерий – например е възможно един продукт да бъде използван както за обучение, така и за бързо решаване на задачи. Разгледаните софтуерни продукти са разделени в две основни категории (от гл. т. на самите софтуерни продукти):

- За решаване на задачи, подпомагащи обучението по линейна алгебра;
- За програмирано обучение по линейна алгебра.

Естествено, втората група са значително по-ценни за изследването, понеже в него се предполага да има именно елементи на програмирано обучение.

2.3.1. Софтуерни продукти подпомагащи обучението по линейна алгебра

Съществуват множество софтуерни продукти за решаване на задачи с матрици, детерминанти, системи от линейни уравнения, вектори и др., но те са по-скоро помощни средства за бързо намиране на решения на задачи (готови отговори), отколкото софтуер за обучение. Водещо мнение на много автори е, че най-важното за ефективно и качествено обучение е самото решаване на задачите, а не просто намирането на техните верни отговори. В този смисъл програмите от типа „решавачи на задачи“ могат да се разгледат по-скоро като помощен за присъственото обучение софтуер, а не софтуер за управление на процеса на обучение. Това мнение е подкрепено например в (Day, et al., 1999), където авторите показват примери за това как се използват софтуерните продукти Mathlab, Maple и Mathematica за обучение по линейна алгебра, но насърчават продуктите да се използват само за демонстриране на примери след като студентите са осмислили условията на задачите и вече са запознати с начините за тяхното решаване по традиционен начин. В (Xiaohu, 2009) се изказва мнение, че софтуерни продукти като Mathlab помагат за *„прескачане на скучни изчисления в алгебрата и аритметиката, които водят до дребни, несъществени грешки при работата с матрици“*. В (Raj, 2011) също е показан аналогичен пример със системата Maple, като още в анотацията се казва следното: *„На студентите се позволява да работят интерактивно стъпка по стъпка върху стандартни задачи, като се фокусират върху обучението без да се занимават с аритметика“*. В (Dicovic, 2007) тезата се подкрепя индиректно, като се дават примери как различни елементарни безплатни уеб-базирани приложения могат да бъдат

използвани в процеса на обучение именно като помощни средства за решаване на вече познати като „тривиални задачи“.

В разработения курс, дискутиран в (Idris, 2005), се предвиждат „компютърно подпомогнати уроци“ (използващи софтуерни продукти за решаване на задачи с помощта на компютър) в учебни зали, в които ръководна роля има учителят, но самите уроци винаги са предхождани от други упражнения с традиционно решаване на задачи „на ръка“. В (Константинов, и др., 2010) се казва, че *„В среда на MATLAB могат да се осъществяват сложни операции с вектори и матрици и така напълно се покрива частта линейна алгебра от курса по ЛА-АГ“*, но впоследствие се допълва с *„Целта тук е да се улеснят пресмятанията и да се подпомогне изучаването на основните понятия и факти от преподавания курс“*, т.е. отново се говори за помощно, а не основно средство.

Отново в (Константинов, и др., 2010), както и в (Cowen, 1997) се прави аналогия между MathLab, Maple и Mathematica. В (Cowen, 1997) се изразява мнение, че е много подходящо да се преподава линейна алгебра в компютърни зали и активно да се използва помощен софтуер при извършване на изчисленията, но се подчертава, че не трябва да се достига до крайност. Така например там авторът предлага, когато преподавателят използва мултимедиен проектор и въведе даден израз за пресмятане, преди да натисне бутона за изчисление, да попита студентите „какво смятате, че ще се получи като резултат“. В (Cowen, 1997) все пак е изказано мнение, че студентите са по-активни в обучението по линейна алгебра когато използват помощен софтуер. Авторът там предполага, че *„студентите виждат самите себе си по-скоро седящи пред компютър, отколкото пред черна дъска“* и поради тази причина те чувстват предмета по-полезен, когато е в компютърна зала. Целият курс, който може да се моделира по учебника в (Hernman, et al., 2005), се изгражда на базата на използване на софтуерните продукти Maple и Mathlab. Там авторите предлагат и методически бележки относно запознаването на студентите с тези софтуерни продукти. В (Wu, 2004) е показано възможно приложение на MathLab за представяне на триизмерни визуализации, свързани с теми от линейна алгебра. В (Cowen, 2009) също са показани някои методически аспекти относно използването на MathLab с цел да бъдат решавани по-обемни (откъм сметки) задачи. Подобен подход, отново с MathLab, е показан в (Hill, 2009). Целият този литературен преглед показва, че трите софтуерни продукта – Mathlab, Maple и Mathematica – имат значителна популярност и може спокойно да се твърди, че се използват масово като помощни средства в обучението по линейна алгебра.

Софтуерните продукти, подпомагащи присъственото обучение чрез бързо решаване на вече приети от студентите за тривиални задачи, би следвало да са в полза като помощни средства и в уеб 2.0 обучението, понеже то по същество моделира присъственото. Предимствата и недостатъците на най-популярните софтуерни продукти като Mathlab, Maple и Mathematica са достатъчно обстойно разгледани в цитираните по-горе статии, както и в множество други популярни и научни статии в списания и интернет ресурси. Опити за по-машабно интегриране на точно тези три софтуерни продукта в обучението по линейна алгебра е започнато още през 1992 г. с проект ATLAST (Leon, et al. 1996), спонсориран от Националната фондация за наука (National

Science Foundation) в САЩ. Поради тази причина в дисертацията ще бъдат разгледани други, по-малко популярни софтуерни продукти за решаване на задачи по линейна алгебра, които предоставят достатъчно добри възможности и удобен за използване интерфейс. По-специален акцент ще бъде поставен на софтуерни продукти, които са конкретно ориентирани към процес на обучение по линейна алгебра, а не просто към ефективно решаване на задачи (извършване на изчисления и даване на отговори).

2.3.1.1 Solved!™ Linear Algebra (Solved – Linear Algebra, 2012)

Софтуерният продукт “Solved” се състои от различни модули, свързани с решаване на задачи по математика. В модуля за линейна алгебра се съдържат множество теми, които могат да бъдат използвани в курс по линейна алгебра. Те са обособени в следните раздели:

- Въведение в матрици – включва темите умножение на матрица със скалар, умножение на матрици, събиране и изваждане на матрици;
- Комплексни числа – операции, комплексно-спрегнати числа и тригонометрична форма;
- Приложение на матрици – детерминанти 2×2 , детерминанти 3×3 , детерминанти от n -ти ред, обратна матрица 2×2 , обратна матрица $n \times n$ и транспонирани матрици;
- Системи от линейни уравнения – метод за заместване, формули на Крамер и метод на Гаус;
- Вектори – сбор, разлика, умножение със скалар, намиране на база в реално векторно пространство, намиране на база в комплексно векторно пространство и намиране на дължина на вектор;
- Линейна независимост и комбинации – линейна независимост на вектори в различни пространства и проверка дали вектор е елемент на множество;
- Векторни пространства – представяне на система като векторно равенство и намиране на ранг на матрица;
- Собствени стойности и собствени вектори – намиране на собствени стойности, решаване на характеристично уравнение и намиране на собствени вектори;
- Линейни трансформации – доказване, че дадена трансформация е линейна, намиране на ядро на линейна трансформация, проектиране на вектори чрез линейна трансформация и намиране на образ на линейна трансформация.

Софтуерният продукт е платен и изисква инсталация на потребителската машина. Предлага удобен и интуитивен интерфейс (подобен на по-новите версии на Microsoft Office) за въвеждане на условие на задача, след което предлага бутон за решение. Решението на задачата се дава „стъпка по стъпка“ (т.е. дава се подробно самото решение, а не просто отговор), като на всяка стъпка може да се поиска допълнителна помощ, в която се извежда теоретична информация по въпроса. Програмата е за самостоятелна работа и не поддържа пътища на учене, както и няма интегрирани модули за субект-субектна комуникация с учител или други ученици. Определено е ефективен продукт за самоподготовка. Софтуерът се предлага само и единствено на английски език.

2.3.1.2.Mathway Algebra (Mathway Algebra, 2012)

Уеб-базиран софтуерен продукт, който силно наподобява разгледания в предишната точка (Solved!) - интерфейсът е почти същият, а темите и функционалностите се припокриват. Това припокриване е нормално, защото продуктът е разработен от една и съща фирма за разработка на софтуер (Bagatrix). Едно огромно предимство на това, че продуктът е уеб-базиран е, че не се изисква никаква инсталация на програми на потребителския компютър. В безплатната версия могат да се виждат само отговорите на задачите, а в платената е даден достъп до решение „стъпка по стъпка“ със съответни допълнителни помощи към всяка от тях. Интернет приложението се предлага само на английски език и е фиксирано за употреба на домейна на производителя.

И при този софтуерен продукт може да се направи същото заключение – той би бил ефективен софтуерен продукт за процес на самоподготовка.

2.3.1.3.Esla (Esla, 2009)

Софтуерният продукт се използва за визуализация на операции с вектори, а не за решение на задачи. Той е безплатен и към този момент съдържа две малки програми. Първата се нарича “vec_comb” и моделира триизмерно пространство с координатна система и четири вектора с общо начало т. (0,0). Потребителят има възможност да се премества в различни гледни точки, да се приближава или отдалечава, както и да премества краищата на векторите в различни точки. При селектиране на вектори се показва какво пространство се поражда от тях – двумерно или тримерно. Програмата цели да покаже на студентите, че когато три вектора лежат в една равнина, те са линейно зависими. Втората програма се нарича “trans” и демонстрира линейни трансформации на системи вектори в двумерно пространство. Студентите могат свободно да изчертават различни вектори в това пространство и да променят стойностите в 2x2 матрица на линейната трансформация. С натискането на бутон „приложи трансформацията“ те виждат визуално резултата от нея. Има допълнителни функции като изчертаване на следа, „бъдеща точка“, в която ще се намира върхът на вектор и др. Изключително опростената работа с програмите ги прави много подходящи за подпомагане на процеса на обучение. Не се изисква почти никаква подготовка на студентите за работа със самия софтуерен продукт. Пример за използване на vec_comb от Elsa в процеса на обучение е показан в (Bernman, 2010).

2.3.1.4.Linear Algebra Toolkit от Przemyslaw Bogacki (Bogacki, 2008)

Безплатен интернет ресурс, който се състои от 12 модула:

- Калкулатор за елементарни преобразования – предлага въвеждане на произволна матрица и интерфейс за въвеждане на команди за извършване на елементарни преобразования по редове;
- Преобразуване на матрица в триъгълен вид – студентът въвежда произволна матрица и софтуерът му показва как тя може да бъде приведена в триъгълен вид чрез елементарни преобразования;

- Преобразуване на матрица в диагонален вид – студентът въвежда произволна матрица и софтуерът му показва как тя може да бъде приведена в диагонален вид чрез елементарни преобразования;
- Решаване на система от линейни уравнения – студентът въвежда система от линейни уравнения и софтуерът му показва начинът за нейното решение по метода на Гаус;
- Намиране на обратна матрица – студентът въвежда квадратна матрица, а софтуерът показва начин за намиране на нейната обратна матрица, като включва и проверка дали матрицата е обратима;
- Пресмятане на детерминанта – студентът въвежда детерминанта, а софтуерът показва начина за намиране на детерминантата чрез привеждането ѝ в триъгълен вид;
- Линейна зависимост и независимост на вектори – по въведени вектори в избрано линейно пространство се показва начин за определяне дали те са линейно зависими или независими;
- Проверка за „покриване“ на линейно пространство – по въведени вектори се проверява дали те могат да се изразят като линейна комбинация на базиса на даденото линейно пространство;
- Намиране на база на линейно пространство – по подадени вектори се показва метод за определяне на това кои от тях могат да формират база на линейното пространство;
- Намиране на фундаментална система от решения на система от хомогенни уравнения;
- Намиране на база на ядрото на линейна трансформация;
- Намиране на база на образа на линейна трансформация.

Създадения софтуерен продукт се отличава с това, че решенията на задачите са достатъчно подробно обяснени на всяка стъпка от решението на конкретната задача. Във всяка тема има възможност за препратки към предишните, т.е. има явно демонстриране на надграждане на знанията. Ресурсите са фиксирани на домейна на разработчика и са налични само на английски език.

2.3.1.5.Sage (Sage 5.2, 2012)

Sage е софтуер, лицензиран под GPL лиценз, който е успешна алтернатива на големи платени софтуерни продукти като Maple, Mathematica и Matlab. Подобно на тях той предоставя специализиран език от високо ниво, на който потребителят може да създава обекти и да оперира с тях. Това се счита за недостатък, защото изисква обучение на студентите за писане на код на този език. Софтуерът е с чисто инженерна насоченост – решенията на въведените задачи се показват директно и не се предвиждат обяснения и показване на начини за достигане до тях. Поради тази причина може да се твърди, че продуктът е по-подходящ за студенти, които вече са запознати с учебния предмет, а не такива, които тепърва го изучават. Разбира се, той, от друга страна, предоставя чудесни възможности за надграждане и евентуална бъдеща разработка на модули, свързани с

процеса на обучение. Начини за интегриране на този продукт в процеса на обучение по линейна алгебра са дискутирани в (Sang-Gu, et al., 2010). В (Beezer, 2012a) е представен практически пример. Особен интерес представляват изследванията, представени в (Sang-Gu, 2012), в които се показва начин за интегриране на обучителни продукти за линейна алгебра, базирани на Sage, в мобилни приложения за съвременни мобилни устройства.

2.3.1.6.GNU Octave (GNU Octave 3.6.2, 2012)

По същество коментарът за GNU Octave съвпада с казаното в предишната точка за Sage. Octave е мощна среда за решаване на изчислителни задачи, който успешно се конкурира с Maple, Mathematica и Matlab. Софтуерът е безплатен и има голяма общност от разработчици на модули, които добавят различни функционалности. Специално модул за задачи по линейна алгебра е представен в (GNU Octave Linear Algebra 2.2.0, 2012). Octave е вторият (след Matlab) най-популярен продукт, който се използва за обучение по линейна алгебра в САЩ.

2.3.1.7.ILAS Educational Tools на Sungkyunkwan University

Като част от международната мрежа „International Linear Algebra Society”, базирана в Израел, в корейския университет Sungkyunkwan са разработени редица софтуерни продукти, подпомагащи обучението по линейна алгебра. Първите продукти, подпомагащи обучението, са направени още през 2000 г. (програмата Mathrix на корейски език). Продуктите са описани в (Duk Sun-Kim, et al., 2008) и (Sang-Gu, et al., 2010), като ще бъдат изброени само тези, които са на английски език:

- Encryption applet – с помощта на кратък комикс се демонстрира възможността за използване на умножение на матрици за осъществяване на елементарно кодиране в криптографията и се обяснява начинът за възстановяване на оригиналния текст чрез използване на обратна матрица. Впоследствие на студентите се предоставя java аплет, в който могат да експериментират въпросното кодиране, като въвеждат различни „кодиращи“ матрици. Обръща се специално внимание при въвеждане на матрица, която не е обратима. Софтуерът е наличен за безплатно ползване на адрес: <http://matrix.skku.ac.kr/ilas/er/module2/Applets/Test.html> (последно посетен на 22.08.2012 г.);
- Java Matrix Calculator – софтуерен продукт, който позволява намирането на детерминанта на матрица, привеждане на матрица в триъгълен или диагонален вид чрез използване на елементарни операции, намиране на обратна матрица, собствени стойности и собствени вектори. Не предоставя пояснителна информация за начините за намиране на решението на поставените задачи. Продуктът е наличен за безплатно ползване на адрес: <http://matrix.skku.ac.kr/newMatrixCalENG11/Test.html> (последно посетен на 22.08.2012 г.);
- Random Problem Generator – ще бъде разгледан в глава 2.3.2., защото е основно софтуер за управление на програмирано обучение по линейна алгебра;

- Flash Vector Grapher – позволява визуализация на стандартни операции с вектори – събиране, изваждане и умножение. Продуктът е наличен за безплатно ползване на адрес: http://matrix.skku.ac.kr/2009-Flash/vector2D_grapher2.htm (последно посетен на 22.08.2012 г.);

2.3.1.8. MatrixCalc – Матричный калькулятор online (MatrixCalc, 2012)

Богат набор от безплатни за ползване интернет скриптове, които са разработени през 2011 г. от студенти на Южно-Уралски държавен университет. Сайтът първоначално е наличен както на руски, така и на английски език. След започването на настоящото изследване, с помощ от автора на дисертационния труд, продукта, е преведен и на български език. Възможните действия са:

- Основни операции с матрици – събиране, изваждане, умножение, транспониране, умножаване на матрица с число;
- Преобразуване на матрица в „триъгълен вид“ чрез поредица от елементарни операции върху редове – показва подробно решение на задачите;
- Намиране на ранг на матрица;
- Намиране на детерминанта на матрица от произволен ред. Показва подробно решение, като поддържа два различни метода за самото решение – чрез развитие по ред или стълб и чрез привеждане в триъгълен вид;
- Решаване на система от “n” на брой линейни уравнения с “n” неизвестни – поддържа проверка за съвместимост, решаване по метода на Крамер, решаване чрез използване на обратна матрица, решаване по метода на Гаус и по метода на Гаус-Жордан. Всички решения се показват подробно;
- Намиране на собствени стойности и собствени вектори на матрица от произволно голям ред (работи само с рационални числа).

Всички действия, които потребителят прави в системата, се записват и са достъпни за него в т.нар. „лог“. По този начин се пази история на извършените операции, която ще е от помощ, когато потребителят трябва да обобщи свършената работа. Допълнително е достъпен опростен калкулатор за прости действия с матрици, както и мобилно приложение на Java (може да бъде използвано на мобилни телефони). За теоретична обосновка се дават препратки към руската или съответно английската и българската версия на Wikipedia. Сайтът се ползва с голяма популярност сред студентите. Според мненията на неговите посетители, които са се записали в съществуващата там „книга за гости“, въпросният уебсайт предлага изключително интуитивен и удобен интерфейс.

2.3.1.9. Matrix Reshish (MatrixReshish, 2012)

Сайтът е разработен през 2011 г. и предлага безплатно интерфейс за решаване на следния набор от възможни задачи по линейна алгебра:

- Решаване на система от линейни уравнения по метода Гаус-Жордан;
- Решаване на система от линейни уравнения по метода на Крамер;

- Решаване на система от линейни уравнения чрез матрично уравнение и намиране на обратна матрица;
- Намиране на ранг на матрица;
- Намиране на детерминанта на матрица;
- Намиране на обратна матрица;
- Умножение на квадратна матрица със самата себе си („повдигане на матрица на втора степен“);
- Транспониране на матрица;
- Събиране, изваждане и умножение на матрици.

Специално трябва да се отбележи, че за всяка една от възможните задачи системата може да генерира „бързо“ решение, в което са показани основните дейности за достигане до самото решение на задачата, и „подробно“ решение, в което задачите са решени „стъпка по стъпка“. В тази си част софтуерният продукт би бил особено полезен за студентите при процес на самообучение. Системата е налична на английски и руски език.

2.3.1.10. Linear Algebra Calculators от Jumk.de (Rechneronline – Calculators for Linear Algebra, 2004)

Jumk.de е проект, в който се разработват множество безплатни продукти, насочени към най-различни сфери – образование, забавление, бизнес и др. Разработеният „калкулатор за линейна алгебра“ предлага няколко основни функции:

- Събиране, изваждане, умножение, транспониране и извършване на елементарни преобразувания на матрици от максимална размерност 5×5 ;
- Намиране на детерминанта на матрица от максимална размерност 5×5 ;
- Решаване на система от линейни уравнения (максимум 5 уравнения с 5 неизвестни) – предлага и възможност за намиране на детерминантите от формулите на Крамер;
- Основни операции с вектори.

Системата е налична на английски и немски език. Не предлага подробни решения на задачите, а дава само отговори. Реализирани са връзки между различните модули (например „превръщане“ на детерминанта в матрица и вмъкването ѝ в модула за операции с матрици), но интерфейсът за извършване на подобни прехвърляния на данни не е удобен за работа и някои от действията (сред които определено връзките между различни модули) са объркващи.

2.3.1.11. Mcalcdos от Jason Vanderzwaag (Vanderzwaag J. MCalcDos 0.3, 2004)

Малка безплатна програма, създадена в периода 2002-2004 г., която работи в конзолен режим – всичко се въвежда като обикновен текст и няма графичен интерфейс за въвеждане на информацията. С нея, записани като променливи, може да се създават матрици и вектори и да се извършват операции с тях. Работи както с реални, така и с комплексни числа. Програмата предлага богат набор от математически функции за работа с реални и комплексни числа, както и тригонометрични функции.

Функциите за работа с матрици са следните:

- `cofactor` – връща „кофактор на матрицата“, в който всеки елемент (i,j) е детерминантата на минор $I_{i,j}$ на оригиналната матрица;
- `colvector (A, j)` – връща j -тата колона от матрицата A като вектор;
- `det` – връща детерминантата на матрица;
- `eigenval` – връща вектор, чийто елементи са собствените стойности на матрица;
- `eigenvec` – връща матрица, чийто колони са собствените вектори на матрица, съответстващи на собствените стойности от функцията `eigenval`;
- `ident` – връща единична матрица с размерността на подадена като параметър матрица;
- `inverse` – връща обратна матрица;
- `linsolver (A, y)` – връща вектор x от системата $Ax=y$, където A е матрица, а y е вектор;
- `minor (A, i, j)` – връща минор i,j на матрица A ;
- `rowvector (A, i)` – връща i -тия ред на матрицата A като вектор;
- `trace` – връща следата на матрицата;
- `trans` – връща транспонирана матрица.

Поддържат се и множество функции за операции с вектори и с полиноми. Програмата не показва стъпките от решенията на задачите, а дава само крайни отговори. Работата в конзолен режим е недостатък, ако продуктът се използва от начинаещи потребители (изисква се време от потребителя да свикне със синтаксиса), но и предимство, ако продуктът се използва от потребители, които са запознати със задачите по линейна алгебра и търсят бърз интерфейс за проверка на свои решения.

2.3.1.12. Javascript rational number matrix calculator (JRNMC) от Jeff Morgan (Morgan J. JRNMC, 2008)

Джеф Морган е доктор и преподавател в катедра „Математика“ на Университетът в Хюстън, САЩ. Разработеният от него матричен калкулатор за рационални числа се използва в част от неговите курсове и работни групи (workshops). Разработеният продукт предлага богат набор от действия, които могат да се приложат върху въведена матрица – намиране на обратна матрица, транспониране, намиране на собствени стойности и собствени вектори, следа на матрица, характеристичен полином и др. Въведени матрици могат да се записват в променливи (букви от A до F) и впоследствие да се прилагат действия между тях – събиране, изваждане, умножение на матрици, умножение с число. Максималната големина на матрица е 20×20 .

Във всеки един момент на екрана има 48 текстови полета за въвеждане на стойности на матрицата, 25 контрола (текстови полета и падащи менюта за въвеждане на параметри или избор на операции) и 17 бутона. Поради тази причина може да се изкаже мнение, че интерфейсът не би бил достатъчно удобен за начинаещ потребител, който тепърва се сблъсква със системата, т.е. ще се изисква обучение. Продуктът е наличен само на английски език.

2.3.1.13. Java Script Linear Algebra Calculator (JSLAC) от Marcus Kazmierczak (Mkz Matric Calculator, 1997)

Разработен през 1996 г., може спокойно да се твърди, че това е един от първите „матрични калкулатори“, които са публикувани за свободно ползване в Интернет. Поради тази причина той е добил голяма популярност и бива рефериран в множество форуми и интернет сайтове, а самият той излиза често сред първите места в търсачката Google по търсене на ключови думи, свързани с матрици и операции с матрици на английски език. От друга страна възможностите на калкулатора са доста ограничени, защото той работи само с матрици с размерности 3×3 . Възможните операции са събиране, изваждане и умножение на матрици, намиране на детерминанта на матрица и намиране на обратна матрица.

През 1997 г. същият автор е разработил сходен продукт на програмния език Java, който може да работи с матрици от размерности до 50×50 , но поне към 30.08.2012 г. връзките към този продукт са неактивни.

2.3.1.14. WolframAlpha (WolframAlpha, 2012)

WolframAlpha е частично безплатен, интернет базиран софтуерен продукт, който е добил много голяма популярност за решаване на изчислителни задачи. В частност той е използван много често и за проверка на решения на задачи по линейна алгебра. Например в анотациите към водените курсове по линейна алгебра в Университета на Колорадо, Университета на Уисконсин-Медисън и Университета на Вашингтон в САЩ преподавателите насърчават студентите си да използват именно WolframAlpha като помощник при решаването на домашните им задания. Езикът, на който се въвеждат команди в сайта, е базиран на софтуерния продукт Mathematica.

Софтуерът няма графичен интерфейс за въвеждане на матрици, което трябва да принуди студентите да се запознаят със синтаксиса за въвеждане на матрици и формули. Един пример за въвеждане на сбор от две матрици от размерност 2×2 е следния: $\{\{4,1\},\{2,-1\}\} + \{\{2,2\},\{3,1\}\}$. Системата в безплатния си вариант не извежда подробни решения на задачите, а дава само крайните отговори.

2.3.1.15. Maxima (Maxima 5.28.0, 2012)

Maxima, наследник на легендарния софтуер на MIT от 60-те години Macsyma, е софтуер с отворен код, който успешно се конкурира с популярни продукти като Maple, Mathlab и Mathematica. Също както тях, този продукт е удобен за проверка на отговори на задачи, както и за подпомагането на рутинни и тривиални изчисления, които иначе биха отнели време. Също както и другите продукти от този клас, той поражда нуждата от научаване на специфичния синтаксис на командите. Работи се в конзолен режим и няма графичен интерфейс, но Maxima допуска адаптиране на външни софтуерни продукти към своето ядро, което позволява разработване на графични интерфейси. Такъв например е wxMaxima (WXMaxima 12.09.0, 2012) за операционната система Windows. В

(Nguyen, 2008) са дадени базови напътствия за това как продуктът може да бъде използван за решаване на задачи по линейна алгебра.

2.3.1.16. Visual Linear Algebra (VLA)

Пакет от програми, написани за средата MathLab, с който се показва визуализация на операции от линейна алгебра, които имат приложение в аналитичната геометрия (главно, свързани с линейни трансформации). Практическа демонстрация на този пакет от програми на научна конференция е цитирана в (Cowen, 1997) като „вълнуваща“. Въпреки че проектът не търпи по-нататъшно развитие, той е добър и все още е практически приложим пример за възможностите, които дава компютърната техника в обучението по линейна алгебра. Поради изискването да има инсталирана система Mathlab, този продукт ще бъде класифициран като платен лиценз (макар и самият той да е безплатен, е нужно закупуване на лиценз за Mathlab).

2.3.1.17. Microsoft Mathematics

Microsoft Mathematics е безплатна образователна програма, която има известен набор от контроли за решаване на задачи, свързани с линейната алгебра. Интерфейсът на програмата е изцяло взаимстван от офис пакета на Microsoft, което би следвало да се счита за голям плюс, защото се очаква студентите да го възприемат лесно, след като вече са изучавали офис пакета в училище. Друга полезна функция е, че програмата не просто показва отговорите на задачите, а има възможност за показване на решенията стъпка по стъпка. Microsoft Mathematics може спокойно да бъде разгледан като олекотен и опростен вариант на иначе сложни за употреба софтуерни продукти като Mathlab, Maple, Mathematica и др.

Решенията на задачите много лесно се копират от и към Microsoft Word, което допълнително улеснява студентите. Интерфейсът е наличен само на английски език и не е предвидена възможност за превод. Пример за успешна употреба на Microsoft Mathematics при ученици в последната година от гимназиален курс е представен в (Purwanti, et al., 2013).

2.3.2. Софтуерни продукти за програмирано обучение по линейна алгебра

В тази точка ще бъдат разгледани софтуерни продукти, които реализират функционалност, сходна с тази на теорията на диалогово-обучаващите програми. Целта е да се разучат добри практики и да се подберат примери за успешно реализирани продукти за програмирано обучение. Тези идеи би могло да бъдат използвани при разработката на специализирани софтуерни продукти за обучение по линейна алгебра.

2.3.2.1. Random Problem Generator (RPG) (Duk Sun-Kim, et al., 2008)

RPG е добър пример за среда, в която студентите решават различни произволно генерирани задачи по линейна алгебра. В системата се влиза със факултетен номер и парола, след което се предоставя възможност за решаване на поредица от задачи, които могат да бъдат както с отворен отговор (въвежда се в текстово поле), така и с избираем

(затворен) отговор (тип „тест“). За всеки студент се поддържа статистика на дадените отговори. За разлика от теорията на диалогово-обучаващите програми, в тази среда не може да се ползва помощ и няма „пътища на учене“. Не са предвидени и модули за Уеб 2.0 обучение, но според описанието на курса по линейна алгебра, разработен от авторите и описан в (Sang-Gu, et al., 2010), се използват съпътстващи електронни ресурси за субект-субектна комуникация, като например интернет форуми и Wiki. Авторите използват Random Problem Generator както в учебните часове, така и при самостоятелна подготовка на студентите си.

Средата е налична на адрес <http://galois09.skku.ac.kr/rpgs1.5/> (последно посетен на 22.08.2012 г.). На този етап не е предвидена възможност за реализация на софтуерния продукт извън рамките на учебната институция, която го използва;

2.3.2.2.Lyrix Linear Algebra (Lyryx, 2002)

Уеб базиран продукт, който предлага интерактивно решение на задачи по линейна алгебра, използвайки аплети, написани на програмния език Java. Предлагат се различни типове задачи, които се генерират с произволни стойности. Студентите трябва да решат задачите и да попълнят отговорите в предварително зададени шаблони. След попълването на шаблона отговорът се изпраща към сървъра, където се прави проверка и се оценява с определен брой точки. Ако отговорът е грешен, системата дава елементарна информация, с която посочва на студентите къде точно са сбъркали, а верният отговор се дава наготово. След това те се пренасочват към решаването на следваща задача. По същество този софтуерен продукт може да се разгледа като елементарен вариант на диалогово-обучаваща програма, защото реално може напълно да се адаптира към логико-дидактическата блок-схема с елементи на оценяване. Резултатите за всеки студент се пазят в база от данни, а допълнително се предлага форум за обсъждане на задачите между участниците в обучението. Отбелязаното за по-ранна версия на софтуера при обзора в (Pasman, 2005), а именно, че продуктът се фокусира върху анализиране на резултатите, получени от студентите, а не върху даване на помощ по време на решаване на самите задачи, е вярно и за последната разгледана версия. Това прави софтуера по-подходящ за изпит, отколкото за обучение.

2.3.2.3.MathXPert (MathXpert 4.16, 2004)

MathXPert е софтуерен продукт за програмирано обучение, който не е предвиден за употреба в учебния предмет по линейна алгебра (възможностите му за този предмет са силно ограничени), но за сметка на това е много добър пример за ефективен софтуер за електронно обучение по математика. Потребителите си избират дадена тема и получават автоматично генерирана задача от нея. След това обучаемите могат да маркират част от изобразената формула и да си избират предварително набелязани операции върху нея от падащо меню. Например, при решаването на система от линейни уравнения по метода на Гаус-Жордан, студентите могат да изберат даден ред и да приложат команда за умножаване с число и прибавяне към друг ред от разширената матрица. Може да се използва помощ или да се извика автоматично показване на следващата стъпка, която би

подказала на студентите пътя към постигане на вярно решение. Когато потребителя сметне, че е решил задачата, натиска бутон за проверка.

MathXPert ни дава реален пример за обучителен продукт, който предлага много и най-разнообразни пътища за достигане до решение на поставената задача. При това пътищата не се задават предварително, както е например в теорията на диалогово-обучаващите програми, а софтуерният продукт се адаптира сам спрямо текущото състояние, в което се намира потребителят. Това може да бъде определено и като „нож с две остриета“, защото, ако не се направи проверка, може да се достигне до безкрайно „зацикляне“ или непрекъснато отдалечаване от правилния път за решение на задачата, което в крайна сметка би довело човека, който решава задачата, до отчаяние. В този смисъл би било добре към продукта да се предложи и допълнителна помощ с опция софтуерът да покаже решението от начало до край, която да се използва в случаите, когато обучаемият е попаднал в безизходица. За съжаление, както вече бе споменато, продуктът не предлага достатъчно възможности за провеждане на програмирано обучение по линейна алгебра. Не са предвидени и възможности за разширяване чрез създаване на допълнителни модули.

2.3.2.4. Linear Algebra Trainer

Процесът на създаване на софтуерния продукт е описан в (Pasman, 2005). В (Pasman, 2006) и (Pasman, et al., 2005) са описани резултати от проведените експерименти с този софтуерен продукт. Практически в него е взета основната идея на софтуерния продукт MathXPert – интерактивно прилагане на предварително зададени стандартни операции върху даден обект. За основа на софтуерния продукт се използва ядрото на Mathematica. Пътищата за достигане до решение на дадена задача не са предварително дефинирани, но средата се справя относително добре с намиране на решение на задача от произволна позиция. Като основен недостатък може да се отбележи това, че от студентите все пак се изискват познания по синтаксиса на командите в Mathematica. Със сигурност обаче може да се отбележи, че Linear Algebra Trainer е един от най-добрите примери за програмирано обучение по линейна алгебра.

2.3.2.5. A First Course in Linear Algebra (FCLA) 3.01 от Robert Beezer (Beezer, 2012b)

По същество този интернет ресурс представлява учебник по линейна алгебра, в който последователно са изложени различни теми, във всяка от които има както теория, така и практически примери. Обикновено в края на темите са предоставени файлове с демонстрации и шаблони за софтуерния продукт Sage. Представеният ресурс е отличен пример за употребата на софтуерни технологии за създаване на електронни учебници не само по линейна алгебра, а и по принцип.

2.3.2.6. Адаптация на други софтуерни продукти

Могат да бъдат наблюдавани и опити за адаптация на софтуерни продукти, които не са специализирани към обучението по линейна алгебра. Например в (Arganbright, 2011) е показан начин да се използва програмата за обработка на електронни таблици Microsoft

Excel за решаване на системи от линейни уравнения, детерминанти, намиране на собствени стойности и собствени вектори на матрица, визуализация на вектори в двумерни и тримерни пространства (със съответни операции като смяна на базис, преглед на действие на линеен оператор и др.) и демонстрация на някои числени методи за намиране на собствени стойности.

2.4. Изводи към Глава 2

На базата на обзора на Уеб 2.0 технологиите и на диалогово-обучаващите програми са направени следните изводи:

- Уеб 2.0 обучението, в сравнение с вече утвърденото уеб обучение, подпомага по-ефективно присъственото обучение;
- Уеб 2.0 обучението по математика все още се нуждае от развитие на технологиите за въвеждане и изобразяване на математически текст;
- Диалогово-обучаващите програми се нуждаят от развитие в посока на по-тясна интеграция със съществуващи LCMS;
- Теорията на диалогово-обучаващите програми покрива съвременните стандарти за програмирано обучение, но, за да бъде приложена при дистанционно обучение, се нуждае от сериозна преработка чрез разширение в посока към интеграция в уеб 2.0.

Въз основа на извършения преглед на съществуващи софтуерни продукти е изготвена таблица със сравнение на характеристиките им (таблица 3). От направеното сравнение могат да се приемат следните заключения:

- Най-добре развити са софтуерните продукти за решаване на задачи. Обучителните програми са малко, а по-добрите от тях обикновено са платени. Софтуерните продукти за програмирано обучение са много малко и са предимно прототипи;
- Повечето от по-популярните софтуерни продукти за решаване на задачи са предимно инсталационни програми, докато тенденцията при обучителните продукти е да бъдат уеб-базирани;
- Всички разгледани изцяло уеб-базирани продукти са налични със затворен лиценз, т.е. могат да се използват само и единствено чрез уебсайта на разработчиците им и не е допустимо копирането на продуктите в чужди домейни. Това изключително много затруднява интеграцията на продуктите с оглед на провеждане на Уеб 2.0 обучение. От софтуерните продукти за решаване на задачи, по-известните от които предоставят частични възможности за интеграция на техни модули в уеб страници, не бяха намерени разработени готови за внедряване решения за обучение по линейна алгебра;
- Английският език е доминиращ при почти всички софтуерни продукти, а възможностите за интеграция на друг език в повечето случаи липсват или са ограничени. В нито един от разгледаните софтуерни продукти нямаше реализиран

интерфейс на български език, като само за три софтуерни продукта разработчиците специално са създали система, която прави възможен превода на продукта.

Продукт	Клас	Лиценз	Уеб	I8n	Инсталация	Обучение
Mathlab	S	P	P	N	Y	Y
Mathematica	S	P	P	N	Y	Y
Mapple	S	P	P	N	Y	Y
Solved!	E	P	N	N	Y	N
Mathway Algebra	E	PC	Y	N	N	N
Esla	E	F	N	N	N	N
LA Toolkit	E	FC	Y	N	N	N
Sage	S	P	P	N	Y	Y
GNU Octave	S	P	P	N	Y	Y
ILAS Ed. Tools	E	F	P	N	N	N
MathrixCalc	ES	FC	Y	Y	N	N
Matrix Reshish	ES	FC	Y	N	N	N
Jumk.de LA calcs	S	FC	Y	P	N	N
Mcalcdos	S	F	N	N	Y	Y
JRNMC	S	FC	Y	N	N	Y
JSLAC	S	FC	Y	N	N	N
WolframAlpha	S	FC	Y	N	N	Y
Maxima	S	F	N	N	Y	Y
VLA	S	P	N	N	Y	N
Microsoft Math	S	F	N	N	Y	N
RPG	P	FC	Y	N	N	N
Lyrinx	P	FC	Y	N	N	N
MathXPert	P	P	N	N	Y	N
LA Trainer	P	F	N	P	Y	Y
FCLA	P	FC	Y	N	Y	Y

Таблица 3. Сравнение на софтуерни продукти за обучение по линейна алгебра

От всички разгледани софтуерни продукти, бяха подбрани два за практическа употреба в експеримента – MatrixCalc и Microsoft Mathematics. Те покриват максимално предварително поставените изисквания – лесен и удобен интерфейс, който не би затруднил студентите дори без да им бъде дадена предварителна подготовка, много лесно вмъкване и копиране на формули от и в други текстови редактори, както и елементи на обучителни продукти, а не просто „решавачи на задачи“.

Публикациите с участие на автора, свързани с глава 2, са: (Петров, и др. 2009), (Petrov, et al., 2009), (Isufov, et al., 2009) и (Петров, 2010).

ГЛАВА 3. ОРГАНИЗАЦИОНЕН МОДЕЛ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА СЕМИНАРНИ УПРАЖНЕНИЯ И САМОПОДГОТОВКА ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Курсът, по който е изграден организационният модел, е съобразен с утвърдения учебен план по дисциплината „Линейна алгебра“ за специалности „Педагогика на обучение по математика и информатика“ и „Педагогика на обучение по физика и математика“ в Югозападен университет „Неофит Рилски“. В учебния план е дефинирана следната цел на учебната дисциплина:

Студентите трябва да придобият знания и умения да прилагат изучената теория за моделиране и решаване на реални практически задачи, да извършват основни действия с матрици, да решават детерминанти, системи линейни уравнения по методите на Гаус и Крамер, да работят свободно с линейни пространства и преобразования, да привеждат квадратични форми в каноничен вид.

Седмичният хорариум е 3 часа лекции и 2 часа семинарни упражнения. Дисциплината се води в първи семестър на бакалавърския курс. Оценяването се извършва чрез текущ контрол по време на семестъра, включващ домашни и контролни работи и писмен изпит върху семинарните упражнения и лекционния материал. Текущият контрол е моделиран чрез точкова система, според която студентите могат да получат общ сбор 100 точки, както следва:

- Присъствие на лекции: 8 точки;
- Присъствие на упражнения: 13 точки;
- Домашни задания: 39 точки;
- Контролни работи: 40 точки.

Оценката от текущия контрол се формира спрямо събрания брой точки:

- 0-41 – слаб 2.00
- 41-42 – среден 3.00
- 43-45 – среден 3.25
- 46-50 – добър 3.50
- 51-55 – добър 3.75
- 56-60 – добър 4.00
- 61-67 – добър 4.25
- 68-73 – мн. добър 4.50
- 74-79 – мн. добър 4.75
- 80-84 – мн. добър 5.00
- 85-89 – мн. добър 5.25
- 90-94 – отличен 5.50
- 95-97 – отличен 5.75
- 98-100 – отличен 6.00

Студентите, които не успеят да получат общ сбор от точки поне 41 на текущ контрол, не се допускат до явяване на изпит (за тях се подготвят допълнителни задачи и учебни дейности, с които да наваксат пропуснатите до 41 точки). Студентите, получили от 80 до 94 точки на текущ контрол, се освобождават от писмен изпит-задачи (т.е. на изпита се явяват само върху теоретичния материал), а студентите с 95 до 100 точки се освобождават от изпит и получават оценка отличен 6 за учебния предмет.

Писменият изпит се състои от два компонента, които сумарно дават до 100 точки и формират „оценка от изпит“ по същата скала, както при текущия контрол:

- Писмен изпит-задачи (44 т.);
- Писмен изпит-теория (56 т.).

Окончателната оценка по учебния предмет се формира по формулата:

$$\text{Окончателна оценка} = 0,6 * (\text{Текуща оценка}) + 0,4 * (\text{Писмен изпит}).$$

Исключение се прави с случая, когато оценката от писмен изпит е „слаб 2“ – тогава – независимо от оценката на текущия контрол, студентът получава оценка „слаб 2“ и се явява на поправителен изпит.

3.1. Организация на семинарни упражнения и процес на самоподготовка по учебния предмет „Линейна алгебра“

Според учебния план семинарните упражнения са общо 15 на брой, всяко от което е по 2 учебни часа седмично. Две от семинарните упражнения се използват за провеждане на контролни работи от текущото оценяване, следователно за обучение могат да се използват общо 13 на брой упражнения (т.е. общо 26 учебни часа). Конспектът, съгласно който са и семинарните упражнения, е съобразен с учебника по „Линейна алгебра“ на Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград (Борисов, и др., 2009). Темите, които се разглеждат, са следните:

- Упражнение 1 – метод на Хорнер за намиране на корените на полином;
- Упражнение 2 – алгебричен вид на комплексните числа;
- Упражнение 3 – тригонометричен вид на комплексните числа;
- Упражнение 4 – матрици и детерминанти;
- Упражнение 5 – детерминанти от по-висок ред;
- Упражнение 6 – обратни матрици;
- Упражнение 7 – системи линейни уравнения – методи на Гаус и Гаус-Жордан;
- Упражнение 8 – формули на Крамер;
- Контролна работа №1;
- Упражнение 9 – линейни пространства;
- Упражнение 10 – линейни оператори;
- Упражнение 11 – собствени стойности и собствени вектори на линеен оператор;

- Упражнение 12 – Евклидови и унитарни пространства;
- Упражнение 13 – квадратични форми;
- Контролна работа №2

Първите три упражнения могат да се приемат за уводни и имат за цел да подготвят студентите за изучаване на основния материал по предмета. В тях, въпреки че формално не е записано в конспекта, при наличие на свободно време се припомнят и основни знания от теория на множествата, които се предполага, че студентите трябва да са изучавали в училище. В съвременните учебни програми в българското образование теория на множествата все още не се разглежда като самостоятелен учебен предмет в училище, но елементи от теорията са широко застъпени и използвани в други учебни предмети.

Основният фокус на изследването е да се засили активното участие на студентите по време на семинарните упражнения чрез използването на интерактивни методи на обучение. Основният проблем, който пречи на осъществяването на тази цел, е липсата на достатъчно часове в хорариума на учебния предмет. В неформални разговори много преподаватели от различни университети (Югозападен университет „Неофит Рилски“, Софийски университет „Св. Климент Охридски“ и Университет за национално и световно стопанство) подкрепят мнението, че 26 учебни часа биха били достатъчни само за монологично представяне на материала, но едва ли биха позволили да се въведат ефективно интерактивни методи на обучение. Но понеже отреденият хорариум е непроменим фактор, е нужно да се търсят алтернативни резерви. Един логичен избор за такива резерви са домашните работи за самостоятелна подготовка. Именно към тях е насочена основната тежест в изменение на традиционния организационен модел.

В наложената практика по учебната дисциплина домашните задания са три на брой, всяко от което с по няколко задачи по поредни теми от конспекта. Разпределени са през равни периоди през семестъра. Според шесткомпонентната система от (Ганчев, и др., 2002), домашните работи спомагат едновременно при затвърждаване на изучените знания и при поддържането им. Стандартно за предаването на всяка домашна работа има определен срок, който е до получаването на следващото задание. Практиката показва, че почти винаги има немалка част от студентите, които не успяват да спазят сроковете за предаване, а дори и контролът да бъде засилен – почти всички предават своите домашни работи в „последния момент“ (т.е. в края на установения срок за предаване). Това не е сериозен проблем стига поставената цел (студентите да изучат достатъчно добре знанията от учебния предмет) да бъде постигната.

В настоящото изследване обаче се поставя едно допълнително изискване към домашните задания – те, освен всичко казано дотук, трябва да подпомогнат въвеждането на интерактивни методи за обучение по време на семинарните упражнения. Това налага реорганизация и реструктуриране на модела на задаване и предаване на домашни работи:

- Вместо три домашни работи с по няколко задачи от различни теми всяка, да бъдат давани множество от малки (1-2 задачи) домашни задания, непосредствено след края на всяко семинарно упражнение. Очакването е, че ако студентите предават домашните си работи навреме, те ще бъдат по-добре подготвени по време на семинарните упражнения и при въвеждането на интерактивни методи на асистента няма да му се налага да припомня знания, които са били изучавани в предишния учебен час. В този подход може да се видят сходства с модела от (Каракашева, 2011) и (Каракашева, 2012);
- Предаването на домашните работи (и изобщо целият процес на самоподготовка) да се извършва чрез Уеб 2.0 обучение, в което студентите да могат да комуникират свободно помежду си и с преподавателя, да си помагат взаимно и да използват помощен софтуер. Целите на тази мярка са две:
 - Да бъде улеснен достъпът до помощ, когато даден студент не успява да се справи с решението на дадена задача – традиционно такава помощ се дава в часовете за консултации на преподавателя, но с оглед на въведения по-стриктен режим с кратки срокове за предаване на домашните работи е възможно студентите да не могат да се възползват от нея;
 - Да мотивира екипната работа и интерактивното взаимодействие между студентите – хипотезата в случая е, че интерактивното взаимодействие в Уеб 2.0 обучението ще спомогне и за по-лесното въвеждане на интерактивно обучение по време на семинарните упражнения.

При въвеждането на подобна реорганизация естествено би следвало да се очакват и негативни ефекти. На първо място може да се предположи, че времето, което преподавателят отделя за консултации, ще се увеличи значително – по-лесният достъп до преподавателя вероятно ще мотивира студентите за по-активно задаване на въпроси към него.

Друг основен очакван проблем е свързан със запознаването на студентите с новата за тях учебна среда – съвсем нормално е да се очаква част от студентите да изпитат затруднения с боравенето със софтуерните продукти и съответно това отново би довело до допълнително отделено време от страна на преподавателя за оказване на помощ. От друга страна тези негативи се компенсират със значително по-гъвкавото време, в което преподавателят ще предлага помощ на студентите – той вече не е обвързан с конкретни часове за приемно време, а може да оказва помощ на студентите по всяко време на денонощието, т.е., когато на него му е удобно.

Схематично предложения организационен модел за провеждане на семинарни упражнения е представен на диаграма 1. Трябва да се отбележи, че в определени случаи е възможно в семинарното упражнение поставянето на условието на практическата задача да се даде в началото на упражнението, а нейното решение да се изведе в края му.

Нататък следва да бъдат моделирани подходящи интерактивни методи за обучение по време на семинарните упражнения и да бъдат подбрани подходящи практически ориентирани задачи – както за упражненията, така и за самостоятелна работа.



Диаграма 1. Обща схема на организационния модел

3.1.1. Подбор на практически-ориентирани задачи по линейна алгебра

Липсата на „концептуално разбиране“ при студентите може много лесно да се засече от преподавателите, ако една задача се преформулира по нов, непознат за студентите начин. Даването на различни гледни точки върху един проблем вече бе споменато като ефективен метод за прилагане на принципа за индивидуализация. Така например, в темата за намиране на собствени стойности и собствени вектори на линеен оператор, една и съща задача (по естество на нужните математически операции за достигане до решение) може да бъде поднесена с привидно различни условия:

- В линейно пространство с даден базис е дефиниран линеен оператор с дадена матрица A . Да се намери матрицата T на прехода от дадения базис към базиса от собствените вектори на оператора, както и матрицата D на оператора в базиса, съставен от собствените му вектори;
- В линейно пространство с даден базис е дефиниран линеен оператор с дадена матрица A . Да се намери базис на линейното пространство, в който матрицата на оператора е диагонална и да се намери матрицата на прехода от дадения базис към намерения;
- Дадена е матрица A . Да се намерят неособена матрица T и диагонална матрица D такива, че $D=T^{-1}AT$.

Този принцип за даване на различна гледна точка върху по същество една задача може да бъде усилен чрез използване на математическо моделиране. Чрез него може да бъде осъществена връзка между различни учебни предмети, както и да бъде използвано за демонстрация на приложимостта на изучавани абстрактни математически модели в практиката. Това би било много полезно за математически дисциплини с високо ниво на абстракция, каквато е линейната алгебра. За целта е хубаво да се подберат задачи, с които да се демонстрират приложенията на линейната алгебра в практиката.

Според (Gainsburg, 2006), типичните стъпки в процеса на моделиране са:

- Идентифициране на проблем от реалния свят;
- Идеализиране на проблема;
- Изразяване на идеализирания проблем чрез математически апарат;
- Прилагане на математически изчисления (решаване на моделираната задача);
- Интерпретиране на математическите резултати с термини от реалния свят;
- Проверка дали интерпретацията отговаря на реалността.

Очевидно е, че ако студентите не са усвоили математическия апарат за решаване на стандартни математически задачи, те няма как да преминат през стъпката за „прилагане на математически изчисления“. Поради тази причина даването на практически задачи, чието решение трябва да бъде представено чрез математическо моделиране, трябва да се предхожда от задълбочено усвояване на знанията по линейна алгебра. Затова е по-практично подобни задачи да бъдат давани в края на упражненията (като демонстриране

на пример за практическата приложимост за наученото по време на упражнението) и най-вече като задачи за самоподготовка по време на домашните работи.

Трябва специално да се отбележи, че ако бъдат дадени подобни задачи за „домашна работа“, е съвсем нормално да се очаква, че голяма част от студентите ще изпитат затруднения в първата част от процеса на решаване на задачата (идентифициране на проблем от реалния свят, идеализиране на проблема и изразяване на идеализирания проблем чрез математически апарат). Това е още по-вярно за предмети от първи курс на университетското обучение, където студентите са се сблъскали прекалено рядко с подобни задачи. Поради тази причина е нужно преподавателите да отделят допълнително време за консултации, в което активно да помагат на студентите, които изпитват подобни затруднения. При крайното оценяване на предадената задача е редно преподавателите да не бъдат прекалено критични и да не намаляват оценката на студенти, които не са успели да моделират задачата, но, след като им е било помогнато, са успели да извършат математическите изчисления и обобщението сами. Друг важен момент при даване на задачи, изискващи математическо моделиране, е, че изчислителната част на задачите не трябва да е прекалено тежка. В противен случай студентите биха изпитали несигурност в съставения от тях математически модел, а това би предизвикало принципно негативно отношение към подобен род задачи.

Един от най-често използваните подходи за мотивиране на нуждата от изучаване на линейна алгебра е да се демонстрира пряката ѝ взаимовръзка с предмета аналитична геометрия. В много специалности дори учебните предмети са обединени в един общ. Понеже аналитичната геометрия е учебен предмет с изразена практическа насоченост, това може би от много автори на учебници и ръководства се приема за достатъчна обосновка за нуждата за изучаване на линейна алгебра и в повечето литературни източници се пропуска да бъде давана демонстрация за практическата приложимост на разглежданата теория. Практически ориентирани задачи липсват дори в ръководствата към учебника „Висша математика за фармацевти“ (издание от 1987 г.), сборник от задачи по ЛААГ на УАСГ от 2010 г. и др. по-строга специализирани издания (например издания за инженери от Технически университет – София), които предполагат значително по-широк поглед за междупредметни връзки. След преглед на 13 учебници и ръководства на български език (6 съвременни и 7 издавани преди 1990 г.), които включват знания от предмета Линейна алгебра, се установи, че само в два от тях присъстват примери с математическо моделиране, при това само епизодични.

В (Александров, и др., 1999) се дават следните две задачи като пример за приложение на симетрични матрици:

Стр. 187, задача 26: *За компания от n човека да образуваме квадратната матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^n$, където:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } i \neq j \text{ и } i \text{ е приятел на } j \\ 0, & \text{ако } i = j \text{ или } i \text{ не е приятел на } j \end{cases}$$

Тогава елементите b_{ij} на симетричната матрица $B = A \cdot A^t$ са равни на броя на общите приятели на i и j .

Всеки студент с факултетен номер $i, 1 \leq i \leq 100$, е приятелна студентите с факултетни номера $j > i$. Да се намери общият брой на студентите с факултетни номера i и j за произволни $1 \leq i, j \leq 100$

Стр. 187, задача 27: За археологически разкопки в m могили са намерени n различни предмета. Образуваме матрицата $A \in \mathbb{Z}_{m,n}$, полагайки

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } i - \text{тата могила съдържа } j - \text{тия елемент} \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

а) Да се докаже, че елементите b_{ij} на симетричната матрица $B = A \cdot A^t$ са равни на броя на общите предмети, намерени в i -тата и j -тата могила, а елементите c_{ij} на симетричната матрица $C = A^t \cdot A$ са равни на броя на могилите, в които едновременно са намерени предмети от i -ти и j -ти вид.

На матрицата B или C съпоставяме гра, свързвайки i -ти с j -ти връх само за $b_{ij} > 0$ (съответно $c_{ij} > 0$). Археолозите приемат, че могилите (или съответно предметите), които са свързани с ребро, е вероятно да се отнасят към хронологично близки периоди от време.

б) При археологични разкопки на три могили M_1, M_2 и M_3 са намерени вази, накити и монети. В първата могила са намерени накити и монети, във втората – вази и монети, а в третата – само вази. Каква е най-вероятната хронологична последователност на възникването на тези могили?

В (Йорданов, и др., 2012) – в пример 5.3.17 на стр. 100, се показва как могат да бъдат използвани матрични уравнения за прилагането на модели на Леонтиев в най-проста (статична) версия, като се използват формули на Крамер за решаване на системи от линейни уравнения. Задачата използва специфичен теоретичен материал, който е натрупан в предмети, свързани с икономика, които, от своя страна, не се изучават в специалностите от периметъра на настоящото научно изследване. Поради това тази задача няма да бъде разгледана подробно като пример.

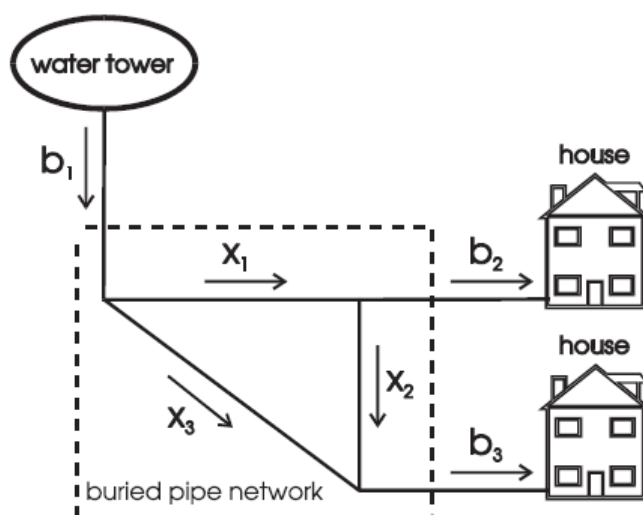
В (Ганчев, 2007) също може да бъде намерен интересен пример за това как могат да бъдат използвани вектори за изравняване на химични уравнения. Подобен пример с лекота би могъл да бъде показан на студентите, защото се очаква, че те имат необходимите знания, а подобни задачи-компоненти са използвани изключително често в училище при учебния предмет „Химия“.

В англоезичната литература практически примери се срещат значително по-често. Повечето се фокусират върху моделиране на матрични уравнения или в задачи, които могат да се решат чрез съставяне на система от линейни уравнения. Съществуват и

специализирани издания на тема „практическо приложение на линейна алгебра“, например (Lay, 2011).

В (Shibberu, 2008) е препоръчана следната задача:

Разгледайте системата от тръби от водната кула до къщите (фигура 6). Ако знаете пропускливостта на тръбите b_1 , b_2 и b_3 , намерете пропускливостта на тръбите x_1 , x_2 и x_3 .



Фигура 6. Примерна задача с математическо моделиране

От студентите се изисква да бъдат използвани знания от училищната математика (там задачи от моделиране с „пълнене на басейни“ и подобни се дават често), което не би следвало да бъде особен проблем. От тях се очаква да бъде съставена системата:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = b_1 \\ x_1 - x_2 = b_2 \\ x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

Естествено, ако задачата бъде дадена с конкретни числа (за b_1 , b_2 и b_3), тя би била много по-интересна за студентите. Тръбите също могат да бъдат променяни, а задачата да бъде произволно усложнявана с по-сложна система.

Още по-често срещани са примерите за икономически ориентирани задачи и транспортни задачи – такива с производства, стоки, цени, складове и т.н. На базата на идеите от няколко разгледани примера от записки от упражнения водени в УНСС и във ВУЗФ (по учебник (Гроздев, 2010)) за целите на изследването е изготвена серия от задачи с математическо моделиране по линейна алгебра. В нея се разглеждат количества от стоки, продажби по периоди и съответни цени. Предметната област може спокойно да бъде променена по аналогия и методиката да бъде приложена в друга сфера.

Нека са дадени са продукти $A_1, \dots, A_k$ с количества продажби в периоди $B_1, \dots, B_n$. Съставя се матрица $M = (a_{ij})$ $i=1, \dots, k$; $j = 1, \dots, n$, където всяко a_{ij} представя количеството продажби на A_i за период B_j :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Естествено, част от процеса на математическо моделиране може да включва изискването студентите сами да се досетят как да съставят тази матрица.

Прототипна задача 1: Намерете общото количество продажби от всички периоди, разделено по продукти.

Решение: Матрицата M се умножава отляво с единична матрица-стълб от ред “ n ”:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ \cdots \\ a_{k1} + a_{k2} + \cdots + a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \cdots \\ S_k \end{pmatrix}$$

Получените суми по редове $S_1, \dots, S_k$ в резултатната матрица-стълб са именно общия брой продажби за всички периоди съответно на продуктите $A_1, \dots, A_k$.

Прототипна задача 2: Намерете общото количество продажби на всички продукти, разделено по периоди.

Решение: Матрицата M се умножава отляво с единична матрица-ред от ред “ k ”:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \cdots + a_{k1} & \cdots & a_{1n} + \cdots + a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & \cdots & T_n \end{pmatrix}$$

Получените суми по стълбове $T_1, \dots, T_n$ в резултатната матрица-ред са именно общия брой продажби на всички продукти, разделени по периодите $B_1, \dots, B_n$.

Прототипна задача 3: Намерете общото количество продажби на всички продукти за всички периоди.

Решение: Отговорът на задачата се получава като комбинация от извършените действия в предишните две. Матрицата M се умножава отляво с единична матрица-ред от ред “ k ” и отляво с единична матрица-стълб от ред “ n ”:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & \cdots & T_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 + T_2 + \cdots + T_n \end{pmatrix}$$

Стойността в клетката на получената матрица с размерност $(1, 1)$ е именно решението на задачата. Естествено, няма разлика дали първо ще се намери общото количество продажби, разделено по периоди, или първо ще се намери общото количество за всеки продукт от всички периоди:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ \cdots \\ S_k \end{pmatrix} = (S_1 + S_2 + \cdots + S_k) \\ &=> (S_1 + S_2 + \cdots + S_k) = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) \end{aligned}$$

Прототипна задача 4: Премахнете продукт A_i , $0 \leq i \leq k$ от отчета.

Решение: Свежда се до умножаване отляво на матрицата M с единична матрица, в която е премахнат ред “ i ”, т.е. матрицата е с размерност $(k-1, k)$:

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ i-1 \\ i \\ \dots \\ k-2 \\ k-1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Прототипна задача 5: Премахнете период B_j , $0 \leq j \leq n$ от отчета.

Решение: Свежда се до умножаване отляво на матрицата M с единична матрица от ред “ n ”, в която е премахнат стълб “ j ” (т.е. тя ще е с размерност $(n, n-1)$):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{k(j-1)} & a_{k(j+1)} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Прототипна задача 6: Ако продуктите $A_1, \dots, A_k$ са продадени съответно с цени $c_1, \dots, c_k$, то намерете общите приходи за всички периоди, разделени по продукти.

Решение: Задачата се свежда до умножаването на получената матрицата-стълб от задача 1 отляво с диагонална матрица с елементи по главния диагонал – цените $c_1, \dots, c_k$:

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & c_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ \dots \\ S_k \end{pmatrix} = (S_1 \cdot c_1 \quad \dots \quad S_k \cdot c_k)$$

Прототипна задача 7: Ако продуктите $A_1, \dots, A_k$ са продадени съответно с цени $c_1, \dots, c_k$, то намерете общите приходи за всички периоди, разделени по продукти, но без да включвате продукт “ i ” в отчета.

Решение: Решението на задачата се получава по същия начин както задача 5, но в лявата матрица (матрицата на цените) се премахва “ i ”-ти ред.

Прототипна задача 8. Ако продуктите $A_1, \dots, A_k$ са продадени съответно с цени $c_1, \dots, c_k$, то намерете общият приход от всички продукти за всички периоди.

Решение: Задачата се свежда до умножаването на получената в задача 6 матрица-ред с единична матрица-стълб от ред k :

$$(S_1 \cdot c_1 \quad \dots \quad S_k \cdot c_k) \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = (S_1 \cdot c_1 + \dots + S_k \cdot c_k) = (S)$$

Полученото число “ S ” е именно общият приход от всички продукти за всички периоди.

Прототипна задача 9. Ако продуктите $A_1, \dots, A_k$ са продадени съответно с цени $c_1, \dots, c_k$, а печалбата на фирмата се сформира като p_1 процента от печалбата от продукт A_1 , p_2 процента от печалбата от продукт A_2 , $\dots$, p_k процента от печалбата от продукт A_k , то намерете общата печалба от всички продукти за всички периоди.

Решение: В задача 6 като резултат се получиха общите приходи за всички периоди, разделени по продукти. В задача 8 получената матрица-ред беше умножена с единична матрица-стълб, за да се получи общия приход. В нея всяко число 1 всъщност може да се приеме като „100%”. Сега трябва да бъде умножена получената в задача 5 матрица-ред с матрица-стълб с елементи $p_1/100, \dots, p_k/100$:

$$\frac{1}{100} (S_1 \cdot c_1 \quad \dots \quad S_k \cdot c_k) \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_k \end{pmatrix} = \left(\frac{S_1 \cdot c_1 \cdot p_1}{100} + \dots + \frac{S_k \cdot c_k \cdot p_k}{100} \right)$$

Именно това е и търсената обща печалба.

Прототипна задача 10. Ако продуктите $A_1, \dots, A_k$ са продадени съответно с цени $c_1, \dots, c_k$, то намерете приходите от всички продукти, разделени по периоди.

Решение: Решението на задачата се свежда до умножението на матрицата M отляво с матрица-ред с цените $c_1, \dots, c_k$:

$$(c_1 \quad \dots \quad c_k) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = (a_{11}c_1 + \dots + a_{k1}c_k \quad \dots \quad a_{1n}c_1 + \dots + a_{kn}c_k) = (pr_1 \quad \dots \quad pr_n)$$

където $pr_1, \dots, pr_n$ са търсените приходи от всички продукти по периодите $B_1, \dots, B_n$. Може лесно да се направи аналогия с извършените действия в задача 2.

Прототипна задача 11. Ако знаете, че общите приходи от всички продукти, разделени по периоди, са съответно $pr_1, \dots, pr_n$, то намерете цените на продуктите.

Решение: Задачата се свежда до решаване на матричното уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = (pr_1 \quad \dots \quad pr_n)$$

където търсената матрица-ред $X = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_k)$ ще съдържа търсените цени.

Прототипна задача 12. Ако знаете, че общите приходи за всички периоди, разделени по продукти, са съответно $prA_1, \dots, prA_k$, то намерете цените на продуктите.

Решение: Решава се матричното уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = (prA_1 \ \dots \ prA_k)$$

или по-точно

$$X \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ \dots \\ S_k \end{pmatrix} = (prA_1 \ \dots \ prA_k)$$

където диагоналната матрица

$$X = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & c_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & c_k \end{pmatrix}$$

ще съдържа цените на продуктите по главния диагонал. Ако тази матрица се умножи с единична матрица-стълб от ред “k”, ще се получи матрица-стълб с търсените цени.

От тук нататък може да бъдат моделирани множество от задачи с конкретни числа, които да бъдат използвани за демонстрация на операциите с „умножение на матрици“ или при намиране на „обратни матрици“. Допълнително могат да бъдат комбинирани и с други операции – сбор и разлика на матрици. По време на експеримента бяха разработени няколко такива задачи:

Примерна задача 1. (умножение на матрица с число и умножение на матрици):

Всеки служител в отдел *Продажби* на фирма получава основна заплата и бонус спрямо количеството на продадените продукти. За последния месец статистиките са следните:

1. Ива има твърда заплата 800 лева и бонуси от 420 лева;
2. Мартин има твърда заплата 700 лева и бонуси от 300 лева;
3. Найденов има твърда заплата 1000 лева и бонуси от 700 лева;
4. Мария има твърда заплата 900 лева и бонуси от 100 лева;
5. Елена има твърда заплата 800 лева и бонуси от 0 лева.

Шефът на фирмата бил много доволен от продажбите през последния месец и решил да даде 15% увеличение на общата заплата на служителите си. Намерете по колко лева ще вземе всеки служител общо след увеличението.

Примерна задача 2. (сбор и разлика на матрици):

Автомобилна компания продава три вида модификации на свой модел – къса база, дълга база и пикап.

Статистиките за продажбите в България за 2009 г. са следните:

1. За първото тримесечие 300 къса база, 20 дълга база и 10 пикапа;
2. За второто тримесечие 320 къса база, 40 дълга база и 0 пикапа;
3. За третото тримесечие 252 къса база, 13 дълга база и 2 пикапа;
4. За четвъртото тримесечие 310 къса база, 112 дълга база и 20 пикапа.

Статистиките за продажбите в България за 2010 г. са следните:

1. За първото тримесечие 200 къса база, 30 дълга база и 16 пикапа;
2. За второто тримесечие 190 къса база, 23 дълга база и 8 пикапа;
3. За третото тримесечие 210 къса база, 6 дълга база и 6 пикапа;
4. За четвъртото тримесечие 270 къса база, 8 дълга база и 10 пикапа.

Намерете средните продажби на автомобили от тип къса база, дълга база и пикап от двете години, разделени по тримесечия.

Подобни на тази задачи (формирание на матрици с размерност 3×4 на базата на дадени данни и извършване на операция между тях) са препоръчани в (Shenquan, 2003), където се изказва мнение, че така „математическата теория става много по-интересна“.

Примерна задача 3. (умножение на матрици):

Иван, Стоян и Мартин закупили принтери, скенери и копирни машини. Иван закупил 8 принтера, 6 скенера и 3 копирни машини. Стоян закупил 10 принтера, 3 скенера и 10 копирни машини. Мартин закупил 5 принтера, 5 скенера и 5 копирни машини.

Ако цената на принтер е 300 лева, цената на скенер 200 лева и цената на копирна машина е 500 лева, намерете по колко пари е изхарчил всеки един от тях поотделно.

Примерна задача 4. (умножение на матрици):

Едни от компонентите, от които зависи текущата оценка по предмета “Линейна алгебра”, се формират от присъствията на упражнения и решаването на домашни задания. След завършването на курса имало пет студента, които имали следните статистики:

1. Ива е присъствала на 13 упражнения и е решила успешно 9 домашни задания;
2. Стоян е присъствал на 10 упражнения и е решил успешно 5 домашни задания;
3. Мартин е присъствал на 15 упражнения и е решил успешно 15 домашни задания;
4. Невена е присъствала на 15 упражнения и е решила успешно 10 домашни задания;

5. Никола е присъствал на 14 упражнения и е решил успешно 13 домашни задания.

Намерете общия брой точки на всеки от изброените студенти, като имате в предвид, че присъствието на упражнения носи 1 точка, а решаването на домашно задание носи 3 точки.

Що се отнася отнася до темата за „обратни матрици и матрични уравнения“, там може да се използва същата методика за моделиране, но просто се променят даденото и търсеното.

Примерна задача 5. (обратни матрици и матрични уравнения):

Фирма произвежда сини, черни и червени маркери. Тя разполага три склада с номера I, II и III. В склад I в наличност има 10 000 сини, 20 000 черни и 0 червени маркера. В склад II има 20 000 сини, 20 000 черни и 10 000 червени маркера. В склад III има 0 сини, 40 000 черни и 10 000 червени маркера.

Знаем, че ако бъдат продадени всички маркери, то приходите от сини ще са 30 000 лв., от черни 120 000 лв., а от червени 30 000 лева. Намерете каква е цената на син, цената на черен и цената на червен маркер като моделирате задачата с матрично уравнение.

Примерна задача 6. (обратни матрици и матрични уравнения):

Иван купил 3 дъвки, 1 пакет бисквити и 5 бонбона. Петър купил 6 дъвки, 3 пакета бисквити и нито един бонбон. Димитър купил 3 дъвки, 3 пакета бисквити и 5 бонбона.

Ако знаем, че Иван е изхарчил общо 7 лв., Петър е изхарчил общо 12 лв., а Димитър е изхарчил общо 13 лв., то намерете цените съответно на дъвките, пакетите бисквити и бонбоните, като моделирате задачата с матрично уравнение.

Примерна задача 7. (обратни матрици и матрични уравнения):

Юрий имал нужда да закупи домати, чушки и картофи. Понеже бил изключително пестелив човек, той редовно правил подробна сметка в кой магазин ще му излезе най-евтино да пазарува. За тази конкретна покупка той намерил, че в Кауфланд домати струват 1 лев, чушките струват 2 лева, а картофите струват 1 лев за килограм. В Билла домати струват 1 лев и 25 стотинки, чушките струват 1 лев и 75 стотинки, а картофите 1 лев за килограм. В ПроМаркет домати струват 1 лев за килограм, чушките 2 лева и 25 стотинки, а картофите 75 стотинки за килограм. Накрая Юрий изчислил, че ако отиде в Кауфланд той ще трябва да похарчи 18 лева, ако отиде в Билла ще похарчи 17 лева, а ако отиде в ПроМаркет ще похарчи общо 18 лева и 50 стотинки.

Колко килограма домати, колко килограма чушки и колко килограма картофи е искал да закупи Юрий? Моделирайте решението на задачата чрез решаване на матрично уравнение.

Възможни са и примери за задачи, които първоначално не е очевидно как би могло да бъдат моделирани с апарата на линейна алгебра. Такива естествено трябва да се дават, решени наготово от преподавателя – било то по време на упражнение или в средата за електронно обучение. Подобна задача, която се възползва от лингвистичен анализ на текст, е следната:

Примерна задача 8. Принцесата е на толкова години, на колкото ще бъде принцът когато принцесата е на два пъти годините, на които е бил принцът, когато годините на принцесата са били половината от сумата на техните години сега. Намерете зависимостта между годините на принцесата и годините на принца към този момент.

Решение: Първоначално е добре да бъде моделирана таблица, в която да се покажат всички неизвестни. Ако X и Y са съответно годините на принцесата/принца, то с X_P/Y_P ще се бележат годините им в миналото, а с X_F/Y_F годините им в бъдещето:

Име	Години в миналото	Години сега	Години в бъдещето
Принцеса	X_P	X	X_F
Принц	Y_P	Y	Y_F

От тук нататък трябва да се направи анализ на текста в условието на задачата:

„Принцесата е на толкова години, колкото ще бъде принцът“ $\Rightarrow X = Y_F$

“ще бъде принцът, когато принцесата е два пъти годините, на които е бил принца”
 $X_F = 2 \cdot Y_P$

“бил принцът, когато годините на принцесата са били половината от сумата на техните години сега” $\Rightarrow X_P = (X+Y)/2$.

Замествайки тези зависимости в таблицата се получава:

Име	Години в миналото	Години сега	Години в бъдещето
Принцеса	$(X+Y)/2$	X	$2Y_P$
Принц	Y_P	Y	X

Разликите в годините им винаги са били равни (d – distance), т.е. вече може да се състави следната система от три линейни уравнения с четири неизвестни:

$$\begin{cases} X - Y = d \\ \frac{X}{2} + \frac{Y}{2} - Y_P = d \\ -X + 2Y_P = d \end{cases}$$

От тук лесно се получава и търсената зависимост, а именно $X = (4/3)Y$.

Друг пример за съставяне на система от линейни уравнения е даден в интернет ресурс (Боев, 2012) на Факултет по математика и информатика на Софийски университет „Св. Климент Охридски“:

Трябва да се композира хранителна смес от три компоненти – царевично зърно, соево зърно и памукови семена (за краткост: зърно, соя и семена). От хранителните характеристики на компонентите се знае, че 1 единица (например в грамове или килограми) от всяка компонента произвежда протеин, мазнини и влакна в количества – части от единицата, дадени в следната таблица.

	Зърно	Соя	Семена
Протеин	0,25	0,4	0,2
Мазнини	0,4	0,2	0,3
Влакна	0,3	0,2	0,1

Една доза от хранителната смес трябва да осигури 22 единици протеин, 28 единици мазнини и 18 единици влакна. Въпросът е по колко единици от всяка компонента трябва да вземем, за да съставим желаната смес.

Други често давани примери са свързани със задачи с кодиране (шифриране) на текст. Например в публикуваните в Интернет (Учебни материали на УАСГ, 2009) записки от лекции „Матрично смятане за архитекти“ на доц. Владимир Тодоров се дава следният пример:

С помощта на матрично смятане можете да зашифровате конфиденциален текст, например текста THE*END. Това може да се направи с матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

която чрез умножение го променя по следния начин:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ H \\ E \\ * \\ E \\ N \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ E \\ E \\ H \\ N \\ T \\ * \end{pmatrix}$$

Да отбележим, че матрицата A е специална матрица; значи текста DEEHNT* може да бъде декодиран чрез умножение с A^{-1} .

Подобни примери и задачи, в комбинация с честата употреба на линейна алгебра в паралелното изучаване на аналитичната геометрия, биха дали по-широк поглед върху задачите и би следвало да увеличат интереса към изучавания материал. С показаните до тук задачи се покрива първата част от курса. Що се отнася до втората – от упражнение 9 до упражнение 13, там нивото на абстракция се увеличава значително и става все по-трудно да бъдат моделирани подобни задачи. Не защото не е възможно да се направят, а защото практиката показва, че дори само изчислителната част на задачите е достатъчно трудна за студентите. Ако към нея се добави и изискването за математическо моделиране, това би направило задачите прекалено сложни. Поради тази причина практическите задачи е редно да бъдат показвани като примери, но не и дадени като задачи за самостоятелна подготовка.

Темата за „линейни пространства“ може спокойно да бъде определена като основна за учебния предмет „Линейна алгебра“. В нея се разглеждат вектори, линейни комбинации на вектори, ранг на система от вектори, базиси, линейна обвивка на вектори, смяна на базис, сечение на линейни пространства и др. Новата терминология, която се въвежда, е със значително количество, а и материалът като обем е твърде голям. Поради тази причина за целите на експеримента се прецени, че е по-добре в това упражнение да не бъдат давани примери извън стандартните насоки за това къде в аналитичната геометрия ще има приложение на изучените знания (напр. смяната на базис участва при смяна на координатна система).

В темата за „линейни оператори“ има едно популярно поле за практическа демонстрация – компютърната графика. Демонстрацията на някои основни линейни оператори за трансформация на фигури в равнината винаги се гледа с интерес от страна на студентите, а и, от своя страна, е достатъчно елементарна, за да бъде успешно осмислена:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} - \text{ротация на ъгъл } \theta$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \text{осева симетрия спрямо абсисната ос}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{осева симетрия спрямо ординатната ос}$$

$$A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} - \text{машабиране с } X \text{ във всички посоки}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{накланяне (shear mapping)}$$

Естествено, счете се за удачно да бъдат показани примери чрез използване на компютърен софтуер за визуална демонстрация, например Esla. Особено интересни за студентите са примерите, свързани с цифрова фотография. Може в по-елементаризиран вид да се обясни, че всяко изображение се представя като множество от миниатюрни точки, подредени по редове – пиксели, всеки от които представлява наредена тройка от

цели числа между 0 и 255 – наситеност на червен, зелен и син цвят (цветови модел RGB, който се използва и при компютърните екрани). Комбинациите между тези три числа дават 16 777 216 възможни цвята за всяка точка. Лесно е да се забележи, че представено по този начин, всяко изображение може да бъде съответно представено чрез три матрици – по една за всеки цветови компонент на RGB модела, като върху всяка от тях естествено може да бъдат прилагани изброените по-горе операции, както и множество други, по-сложни линейни оператори – различни филтри в програмните продукти за обработка на изображения.

Практическото приложение на знанията от темата „собствени стойности и собствени вектори на линеен оператор“ е – от една страна, неизчерпаемо, но – от друга, е все още далеч от възможностите на студентите в първи курс. Затова в тази тема е трудно да се дадат прости примери за практическо приложение с реални данни – задачите биха били прекалено трудни за разбиране и биха изисквали голямо количество информация от други учебни дисциплини, които все още не са изучавани. Затова в тази тема преподавателят може да мотивира въвеждането на новите знания само чрез даване на общи насоки за тяхната употреба, като например каже на студентите, че собствените стойности и собствените вектори намират широко приложение в различни сфери от живота. Някои от класическите примери са следните:

- Строителството – например при правене на изчисления за намаляване на резонанса при строежа на мостове (може да бъде дадена обща насока за съществуването на проблема) се изчислява собственият вектор на най-малкия магнитуд, за да се характеризира „естествената честота“ на трептене. Ако друг източник на вибрации – например вятър или превозни средства, влезне в резонанс с тази естествена честота, може да се получат огромни вибрации, които да разрушат структурата. По подобен начин се изследва и устойчивостта на сгради срещу земетресения. Един мултимедиян обучителен материал, свързан с изучаване на вибрации, е представен на английски език в (Cheever, 2005);
- Акустиката – отново свързано с резонанса, собствените стойности се използват като характеристики при решаването на задачи, свързани с намаляване на шум, или при изработването на музикални инструменти, при проектирането на звукозаписни студия, при шумоизолиране на стаи и др.;
- При търсенето на нефт и полезни изкопаеми – фирмите, търсещи залежи на полезни изкопаеми, използват големи вибрационни машини, чрез които се търсят характерни промени в честотата на трептене. Там отново се използват собствени стойности като характеристика на вибрациите, получени от търсения материал;
- В Интернет и социалните мрежи – една от най-често цитираните в Интернет статии, свързани с практическа употреба на собствени вектори, е (Kurt, et al., 2006). В нея се развива основната идея, свързана с изчислението на популярността на индексирани уеб сайтовете от търсачката Google, и как се използват собствени вектори за изчислението на т.нар. “page rank” – число, характеризиращо популярността на даден уеб сайт.

Поради ограничение във времето подобни теми не могат да бъдат разглеждани подробно по време на семинарните упражнения по линейна алгебра, въпреки че е очаквано студентите да проявят интерес и да изискат повече подробности. За любознателните от тях е редно да се извади допълнителна информация в процеса на самоподготовка

Друг пример, отново с практическото приложение във фотографията, може да бъде даден като следствие на ортогонално-диагонално-ортогонална декомпозиция (SVD) на матрица. В (Lay, 2011) е даден пример как чрез SVD едно изображение може да бъде предавано на части, като с натрупването на всяка новополучена част от информацията може да се генерира все по-точна интерполация на оригиналното изображение. Това не е по-бързо, но е далеч по-удобно спрямо предаването на изображения „пиксел по пиксел“, защото дава представа за целия образ още в началото на предаването на информация. Тази техника се използва широко от някои много популярни уеб сайтове за споделяне на висококачествени снимки – потребителят вижда общия изглед на снимката с влошено качество още преди да е изтеглил целия файл и ако тази снимка му се стори безинтересна, той може да се откаже да я гледа преждевременно, спестявайки време от чакане за себе си и интернет трафик за уеб сайта.

Не е непрактично и да се дадат насоки за знания, които студентите ще получават от учебни предмети по-нататък в тяхното обучение. В (Cowen, 1997) например е споменато, че не е добре да се оставя мнение у студентите, че намирането на корените на характеристичния полином е единствен начин за намиране на собствени стойности на матрица. Може да бъде предложено по време на лекции или по време на семинарни упражнения преподавателят да спомене, че съществуват числени методи за намиране на собствени стойности и да даде на студентите някои общи сведения за тях – метод на Ланцош, кръговете на Гершгорин, метод на Якоби, метод на Данилевски и др. Разбира се, не трябва да се навлиза в дълбочина, а е подходящо и да им се каже, че такива методи ще бъдат по-подробно разгледани по-късно в учебния предмет „Числени методи“. В този смисъл един такъв подход би дал допълнително по-широка визия на студентите за мястото на линейната алгебра в учебната програма и може да придаде допълнителен стимул за нейното изучаване.

3.1.2. Интерактивни методи за семинарни упражнения по линейна алгебра

При всички семинарни упражнения, независимо от естеството на тяхното съдържание, се предвижда да бъдат използвани следните два интерактивни метода за обучение:

- Задаване на въпроси към цялата група – преподавателят ще задава кратки и по-често лесни въпроси към групата, с цел да следи настроението на студентите и същевременно с това да ги предразполага към дискусия;
- Извеждане на студент пред групата – когато даден студент покаже възможности и изяви желание, може да бъде повикан да застане временно на мястото на преподавателя, за да реши дадена задача до край. Този подход може да се използва

и за извикване на студент, който видимо е изгубил интерес към учебния процес – в този случай тази мярка изкуствено ще поддържа вниманието на по-слабите студенти. Все пак, във втория случай, трябва да се знае, че мярката ще бъде приета по-скоро като наказание, т.е. това е негативен подход.

Отделно от тези два съвсем тривиални метода, в изследването ще бъдат използвани и редица други.

Реализирането на метода за „разделяне на групата на подгрупи за решаване на задачи-компоненти“ е сравнително лесно да бъде приложено в математическите дисциплини и линейната алгебра в частност. Например, за да се намери обратна матрица по метода на адюнгиранияте количества, студентите трябва да решат задачата по формулата:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Както се вижда при матрица A от размерност $n \times n$, студентите трябва да изчислят $n^2 + 1$ на брой детерминанти. При матрица от размерност 4×4 това предоставя възможност задачата да бъде разделена на 17 задачи-компоненти и така да бъде разпределена като индивидуално задание сред студентите в учебната група. Ако студентите са повече, някои от тях (обикновено тези, които са по-пасивни в часа) може да решават дадена задача-компонента по двойки. Асистентът следи и евентуално помага на студенти, които изпитват затруднение. Накрая той събира решенията на различните студенти/групи на дъската.

Друга възможност за използване на същия метод може да се демонстрира при умножение на матрици. Там е възможно асистентът да даде като задача да се умножат две матрици, след което да възложи различни части от решението (умножения по правилото „ред по стълб“) на различни групи студенти. Например, ако матриците са с размерност 5×5 , асистентът може да раздели студентите на групи по 3-4 студента и да им възложи задача да намерят числата в различните редове (и евентуално втори път – стълбове) на резултатната таблица. И в този, както и в горния пример, е удачно по-слаби студенти да бъдат комбинирани с по-мотивирани, както и да се избягва наличието на повече от един изявен екстровеит в една група.

При решаването на детерминанти чрез развиване по ред или стълб може асистентът да даде една задача и да предложи всеки студент да я реши чрез развитие чрез различен ред/стълб. Така студентите ще решават една и съща задача по различни пътища, но в крайна сметка ще достигат до едно и също решение. Например при детерминанта 4×4 има възможност за 16 различни варианти за развитие. Накрая е удачно да се обобщят евристични „правила“ за това кой избор на ред/стълб е най-удачен. Това ще развие интуицията на студентите при решаване на подобни задачи в бъдеще. Един подходящ начин за извеждането на тези правила е организирането на „дискусия чрез кръгове“.

За „разделяне на групата на подгрупи за решение на задача по различни начини“ линейната алгебра също предлага богати възможности. Например може да се постави

задача една от подгрупите да намери обратна матрица по метода на адюнгираните количества (където асистентът е добре да помогне на студентите, като им раздели задачата на задачи-компоненти), а другата подгрупа да реши задачата по метода на Гаус-Жордан. Очаквано, студентите от втората група ще извършат значително по-малко изчисления, отколкото тези от първата. Това може да се посочи от асистента накрая и да се потърси заключение за ефективността на методите от самите студенти. Същият подход може да бъде приложен за сравняване на методите „развитие на детерминанта по ред/стълб“ и „привеждане на детерминанта в триъгълен вид“. Приложение на метода може да се намери и при решаване на системи от линейни уравнения по метода на „Гаус“, „Гаус-Жордан“ и чрез „формули на Крамер“.

Когато се изучават линейни пространства и линейни оператори, е удачно преподавателят да заеме по-централна роля. Учебните задачи биха затруднили студентите, ако трябва да ги решат самостоятелно или в група без помощ от страна на преподавателя. Затова в тези теми е добре да се постави фокус, насочен към по-широка дискусия. В нея преподавателят ще задава въпроси от зоната на близкото развитие на студентите и ще очаква те да изказват различни мнения; съответно преподавателят ще дава по-конкретни примери и в крайна сметка ще се търси общ консенсус около верен извод. Така например (взаимствано по идея от (Cowen, 1997)) преподавателят може да подтиква студентите да говорят по темата за базиси на подпространства (например при темата за ядро и образ на линейен оператор), като задава подвеждащи въпроси към студентите като например „колко базиса има ядрото на линейния оператор“. Целта е да се пречупи евентуално погрешно разбиране, че съществува една единствена система от вектори – „специален базис“ (Cowen, 1997), който винаги произлиза от точно определен метод за намирането му.

Когато се показва методът на „Грам-Шмидт“ в темата за „Евклидови и унитарни пространства“ е възможно да бъдат повиквани последователно няколко студента да излизат пред аудиторията, за да започнат и развият една по-голяма задача. Всеки студент ще извършва определена стъпка от решението на свързаните типови задачи-компоненти – намиране на пореден вектор от ортогоналния базис. В края на задачата е възможно учебната дъска да бъде разделена на три/четири колони (колкото са векторите от базиса) и на трима/четирима студента да им бъде поставена задача да нормират по един от намерените вектори.

Относно учебната документация – материалът, нужен за всички семинарни упражнения, следва да бъде предоставен предварително на студентите в електронната система за обучение. Учебните материали ще включват кратка информация от теорията (дефиниции и теореми без доказателства) и поредица от различни типови задачи, които ще бъдат разглеждани по време на упражнения. Това би предразположило по-мотивираните студенти да се запознаят предварително с учебния материал и така да се включват много по-активно в дискусиите. Ако преподавателят види, че има по-изявени студенти, може да им бъде предложено да участват в прилагането на метода „изнасяне на доклади от страна на студентите“.

3.2. Организация на семинарни упражнения и процес на самоподготовка по учебния предмет „Линейна алгебра и аналитична геометрия“

При адаптиране на разработения организационен модел за преподаване на материал от линейна алгебра при учебния предмет „Линейна алгебра и аналитична геометрия“ трябва да се вземат под внимание няколко основни фактора. Първият и най-основен е седмичният хорариум. В Югозападен университет „Неофит Рилски“ поотделно учебните дисциплини „Линейна алгебра“ и „Аналитична геометрия“ са с хорариуми 3 часа лекции и 2 часа семинарни упражнения седмично – за всяка от дисциплините, което прави 6 часа лекции и 4 часа семинарни упражнения за двата учебни предмета, взети заедно. По „Линейна алгебра и аналитична геометрия“ хорариумът е 3 часа лекции и 3 часа семинарни упражнения. При това в изискванията в учебната програма не отпадат теми и изучаван материал:

- **От учебния план по ЛА:** *„Студентите трябва да придобият знания и умения да прилагат изучената теория за моделиране и решаване на реални практически задачи, да извършват основни действия с матрици, да решават детерминанти, системи линейни уравнения по методите на Гаус и Крамер, да работят свободно с линейни пространства и преобразования, да привеждат квадратични форми в каноничен вид.“;*
- **От учебния план на АГ:** *„Обучението по учебната дисциплина включва изучаване на: векторно смятане със свободни вектори, афинни координатни системи и аналитично представяне на прави и равнини. След въвеждането на двойното отношение се използват и проективни координатни системи. Изучават се основните елементи на проективната, афинната и метричната теория на фигурите от втора степен.“;*
- **От учебния план по ЛААГ** пише, че: *„Обучението по ЛААГ включва изучаване на въпроси от линейната алгебра (комплексни числа, матрици, детерминанти, системи линейни уравнения, линейни пространства, линейни преобразования и квадратични форми) и аналитичната геометрия (вектори, координатни системи, уравнения на права в равнината и равнинна и права в пространството, криви от 2 степен и повърхнини)“.*

Вижда се, че формулировките на ЛА и АГ практически се вливат изцяло в ЛААГ, т.е. учебният материал като количество е един и същ. В същото време за теоретичната подготовка чрез провеждане на лекции хорариумът се намалява двойно. Това еднозначно би трябвало да означава значително по-интензивно преподаване на учебния материал, съпроводено с елементаризиране или незадълбочено изучаване на някои концепции.

Що се отнася до семинарните упражнения, там преподавателите са наложили практика, която частично компенсира намаления хорариум с един час седмично. Докато при изучаването на учебните предмети поотделно наложената практика е да се провежда обучение в 13 семинарни упражнения, а в 2 да се провеждат контролни работи, то в смесения учебен предмет „Линейна алгебра и аналитична геометрия“ обучението се провежда във всички 15 семинарни упражнения, а двете контролни работи са изнесени в

извънучебно време. Така изчисленията показват, че при разделените учебни предмети за изучавания материал са налични $13 \times 2 \times 2 = 52$ учебни часа, а по ЛААГ са налични $15 \times 3 = 45$ учебни часа. Разликата от 7 учебни часа (или 3,5, ако разглеждаме само и единствено материала по линейна алгебра) може да бъде компенсирана сравнително лесно с малко по-интензивно преподаване и (при нужда) пропускане на някои задачи за утвърждаване на вече придобити знания.

В разработения организационен модел се предвижда „липсващите“ часове в хорариума да бъдат компенсирани чрез намаляване на примерите, изискващи математическо моделиране. За примери, свързани с практическа употреба на линейна алгебра, ще бъдат показвани предимно такива, съответно обвързани с учебния предмет „Аналитична геометрия“. По този начин ще се цели едновременно мотивиране на нуждата от знания по единия предмет и въвеждане на нови знания по другия. Така може да се каже, че семинарните упражнения по линейна алгебра и аналитична геометрия няма да бъдат разделени (например в едни упражнения да се изучава само линейна алгебра, а в други само аналитична геометрия или половин упражнение да бъде отделяно за единия предмет, а другата половина за другия), а знанията от двата предмета ще „преливат“ чрез по-пряка демонстрация на техните междупредметни връзки. Това всъщност е съвсем стандартен подход и при традиционното обучение по този учебен предмет, следователно тук няма да бъдат въвеждани сериозни различия между експерименталните и контролните групи в изследването. Планът за въвеждане на интерактивни методи за обучение по линейна алгебра обаче няма да бъде променен. Такива методи може да се въведат и при изучаване на материал от аналитичната геометрия, но единствено, ако преподавателят разполага със свободно учебно време.

Втори основен фактор е свързан с процеса на самоподготовка и по-конкретно с количеството на домашните задания. Не е редно един учебен предмет да превишава значително определено количество обем на работа за процеса на самоподготовка, защото това би претоварило студентите. Поради тази причина домашните задания следва да бъдат с по-малко количество задачи спрямо общото количество задачи, които се дават при изучаване на учебните предмети поотделно (не е строго дефинирано количеството да е двойно по-малко, но все пак трябва да бъде намалено). Това може да се постигне с намаляване на задачите, от една страна (например за дадено упражнение да се даде една вместо две задачи за самоподготовка), и чрез намаляване на сложността на задачите, от друга (например даване на детерминанта с размерност 5×5 вместо 6×6 и т.н.).

Отново свързано с домашните работи – при провеждане на експеримента, трябва да се предвиди и начинът за предаването им. Изследването е фокусирано върху знанията от учебния предмет „Линейна алгебра“, но при ЛААГ трябва да се дават и задачи за домашна работа по аналитична геометрия. За изследването е прието в експерименталните групи да бъдат предавани в електронен вид само задачи, свързани със знания от предмета „Линейна алгебра“. Задачите за домашна работа свързани с „Аналитична геометрия“ ще бъдат предавани на хартия по същия начин, както и при контролните групи.

Трети фактор е свързан с контролните работи по време на семестъра. Докато в учебния план по предмета „Линейна алгебра“ за специалности ПОМИ и ПОФМ са предвидени две контролни работи, в учебния план за предмета „Линейна алгебра и аналитична геометрия“ за различните специалности са предвидени три:

- *Първа контролна работа:* комплексни числа, матрици, детерминанти, системи линейни уравнения;
- *Втора контролна работа:* вектори – линейна зависимост и независимост, скалярно векторно и смесено произведение, уравнения на права в равнината, уравнения на права и равнина в пространството;
- *Трета контролна работа:* линейни пространства, линейни преобразувания, квадратични форми, линейни повърхнини от втора степен.

Както се вижда, подредбата на темите от дисциплината „Линейна алгебра“ не е променена, т.е. този фактор не би следвало да наложи промяна в експериментите.

3.3.Изводи към Глава 3

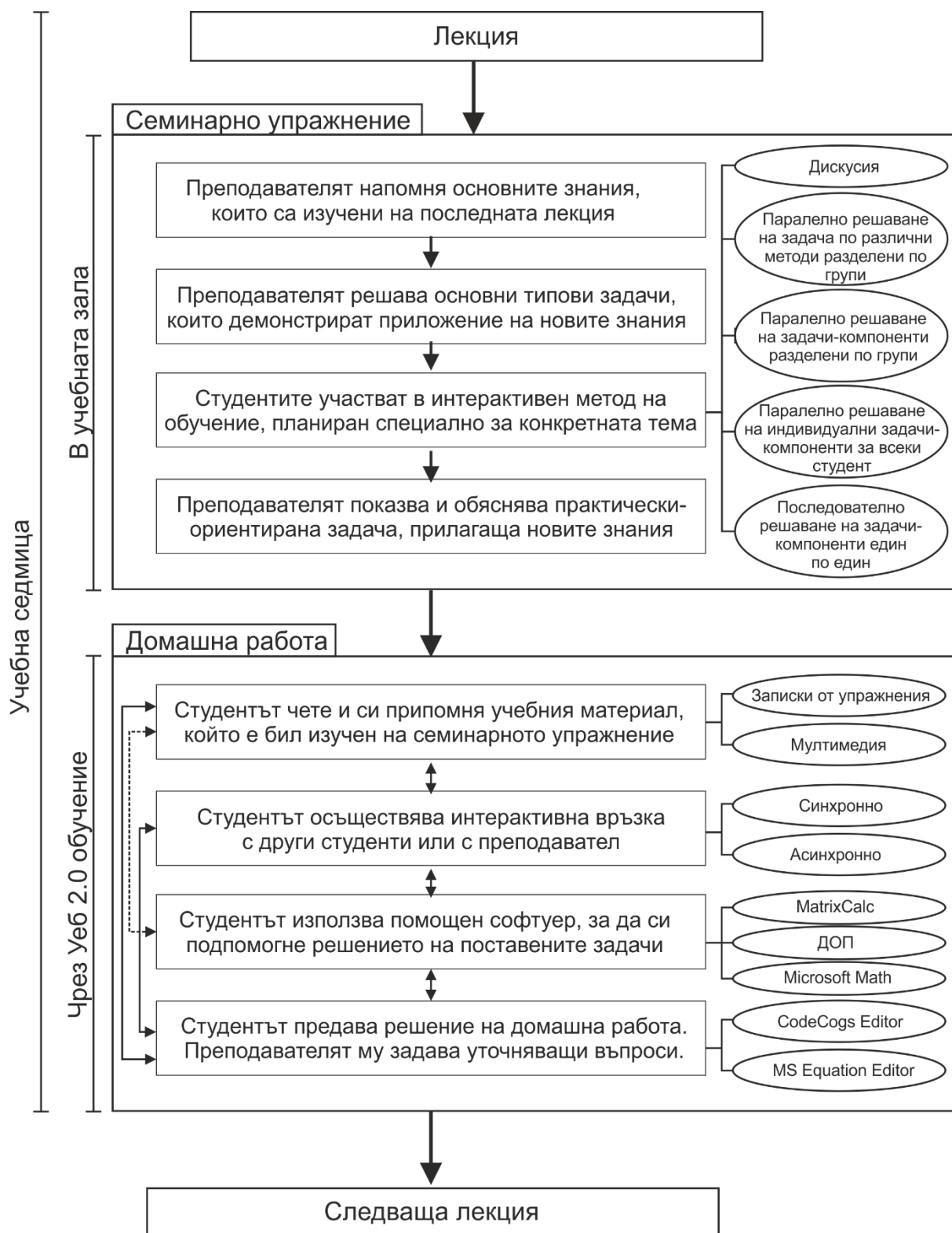
Спрямо съществуващата практика в ЮЗУ са предложени следните промени:

- Въвеждат се домашни задания непосредствено след всяко семинарно упражнение, което би довело до по-добре подготвени студенти на следващото и по този начин ще бъде освободено учебно време;
- По-лесната връзка за получаване на помощ от преподавател и взаимопомощта между самите студенти би трябвало да улеснят студентите в процеса на самоподготовка;
- Интерактивните методи на обучение би следвало да повишат мотивацията на студентите;
- Изтъкването на практическата приложимост на линейната алгебра би трябвало да доведе до допълнително мотивиране на студентите.

При учебния предмет линейна алгебра и аналитична геометрия е предвидено организационния модел да бъде въведен само частично, като засяга само знанията по линейна алгебра. В бъдеще, при наличие на положителни резултати от експеримента, би следвало модела да се разшири като обхваща всички теми от конспекта.

Разширена схема на организационния модел е представена на диаграма 2. Отново следва да се припомни, че в определени случаи е възможно поставянето на условието на практическата задача да се даде в началото на упражнението, а нейното решение да се изведе в края му.

Публикацията с участие на автора, свързана с глава 2, е (Petrov, et al., 2014) – в нея се излагат накратко идеите на организационния модел и се изброяват избраните интерактивни методи на обучение.



Диаграма 2. Разширена схема на организационния модел

ГЛАВА 4. СОФТУЕРНИ КОМПОНЕНТИ ЗА ТЕХНОЛОГИЧНО ПОДПОМАГАНЕ НА ПРОЦЕСА НА САМОПОДГОТОВКА ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА ЗА РЕАЛИЗИРАНЕ НА ОРГАНИЗАЦИОННИЯ МОДЕЛ

В избрания организационен модел за „смесено обучение“ (blended learning), електронното обучение покрива дейностите, свързани със самоподготовката на студентите и допълнителните консултации на студентите с преподавател. Поставените цели са:

- Да предоставя учебни материали, свързани с упражненията по линейна алгебра;
- Да се поставят домашни задания към студентите и да се предоставя възможност те да ги пишат и предават чрез технически средства в самия програмен продукт;
- Да е възможно студентите да обменят опит помежду си открито и/или в скрити лични съобщения;
- Да предоставя възможност за консултация с преподавател, като дискусията да може да е както видима от другите студенти, така и да бъде лична;
- Всички дейности да са интегрирани в едно Уеб 2.0 приложение.

Спрямо така въведените критерии програмният продукт със сигурност трябва да предоставя асинхронни канали за субект-субектна комуникация. Покриването на останалите критерии трябва да се осъществи на базата на добре обоснован избор.

4.1. Литературен обзор, свързан с провеждане на асинхронно Уеб 2.0 обучение

В (Tuparova, et al., 2005) са дефинирани следните две „основни направления на дидактически проблеми в електронното обучение“:

- Разработка на среди за управление за електронно обучение;
- Разработка на учебно съдържание и създаване на курсове за електронно обучение.

Двете направления, разбира се, са тясно свързани. Както е отбелязано в (Süral, 2010) и (Esteban-Gil, et al., 2009), много институции разработват свои собствени среди за електронно обучение и отделят много време за разработване на курсове за електронно обучение, но се оказва, че по-късно те не могат да мултиплицират използването на учебното съдържание, като мигрират курсовете към по-нови среди за електронно обучение, които допринасят със значителни технологични подобрения, нито пък да въведат в разработените от институциите среди тези технологични нововъведения. В такива случаи институциите се принуждават да пренаписват учебното съдържание, а това често отнема много време и ресурси. Поради тази причина тенденцията в световен мащаб е да се търси унифициран стандарт за учебно съдържание, какъвто например е SCORM (Gonzalez-Barbone, et al., 2008) или неговия подобрен вариант Common Cartridge (Gonzalez-Barbone, et al., 2010). Авторите на всички разгледани източници са единодушни, че търсенето на съвместимост между LCMS средите трябва да бъде от първостепенно значение за тяхната разработка в бъдеще.

Интерес обаче представлява и гледната точка на провеждането на научен експеримент, в който трябва да бъдат изпробвани концепции при осъществяване на определен вид електронно обучение. Там обикновено се търси максимална ефективност в експерименталната група, за да може ясно и еднозначно да бъдат отчетени разликите с контролната група. В такива случаи е възможно учените да си позволят да пренебрегнат фактора „съвместимост с други LCMS системи“, ако това би довело до нуждата от правене на компромиси с ефективността на извършваните дейности в тяхното изследване. Действително, ако създаването на един специализиран продукт би довело до по-точни и по-категорични резултати от експеримента, то той би следвало да бъде предпочетен вместо утвърдените LCMS среди, дори това да означава, че създадените учебни материали не са съвместими с други системи и съответно не могат да бъдат преизползвани в оригиналния си вид в бъдеще. Задължително обаче е да бъде предвидена възможност за развитие на такива експериментални модели в посока бъдеща интеграция със съществуващ и утвърден LCMS.

В (Тупаров, 2009) се разглеждат проблемите на управлението на учебно съдържание чрез LCMS в рамките на учебните планове (т.е. – от гледната точка на управление на множество учебни предмети в една единна структура). Авторът отбелязва, че е възможно да се използва както централизирана система за управление, така и множество различни системи (т.нар. „разпределена среда“), но отбелязва така също, че *„традиционно тези дейности се смятат за приоритет на университетския учебен отдел и вероятно затова са оставени на заден план от преподавателите и авторите на електронно учебно съдържание и по правило не са обект на изследователска дейност“*. В (Ajjan, et al., 2008) се отбелязва, че повечето факултети в различни университети са традиционно инертни към въвеждане на новости в учебния процес като например интегриране на неутвърдени софтуерни технологии в средите за електронното обучение. Това би следвало да бъде отчетено като съществен фактор при провеждането на експерименти, в които се използват нетрадиционни софтуерни продукти. В изводите от такива експерименти е важно да се посочват и определени методически насоки как създадените модели биха могли да бъдат прилагани в съществуващите LCMS системи, които използва институцията, където е проведен експериментът. Т.е. – как може добитите знания да бъдат приложени в практиката и извън специализираните и оптимизирани към конкретния проблем системи. Само така тези експерименти биха били полезни и за практиката, особено когато са въведени стриктни стандарти при управление на учебното съдържание на университетско ниво.

Освен това е важно взаимодействието между университета и научните работници да бъде двустранно – не само трябва да се допълва учебно съдържание, но и ако в проведен чрез специализиран софтуерен продукт експеримент бъдат отчетени положителни резултати, а в практическото приложение на модела в утвърдена LCMS система липсват възможности за практическо приложение, това би следвало да послужи за основа за по-нататъшни изследвания, които да доведат до подобряване или надграждане на тази LCMS система.

Спрямо поставените цели за избор на софтурни компоненти за техническо подпомагане на процеса на самоподготовка на студентите, един от най-важните критерии е наличието на канали за асинхронна комуникация. Както е отбелязано в (Петров, 2010), утвърдените технологии за провеждане на асинхронна субект-субектна комуникация в Интернет са:

- *Форуми* – дава се фокус върху провеждането на дискусии по различни теми, които се инициират от потребителите. От гледна точка на обучението преподавателите имат предимно контролна роля в тези дискусии – те насочват обучаемите, задават им въпроси и при нужда ги коригират, но все пак основната цел на форума си остава връзката между обучаемите чрез провеждане на доколкото се може по-свободна дискусия;
- *Блогове* – концепцията на блоговете си остава същата, както и във форумите (провеждане на дискусия по поставен проблем), но с тази съществена разлика, че „първото съобщение“ в отделната иницирирана дискусия е задължително водещо и основно – то е учебният материал от гледната точка на електронното обучение. Има емфаза върху авторството на този учебен материал и този, който го е публикувал, обикновено е преподавателят. От там идва и основната разлика в дискусиите между форуми и блогове – в блоговете обикновено водеща роля има авторът на материала (стандартно той отговаря на въпроси, зададени от другите участници), докато във форумите дискусиите се осъществяват значително по-свободно (има предразположение за това всеки да може да отговори на всеки);
- *Wikis* – обикновено се използват за показване на енциклопедично съдържание, при което всеки потребител има право да редактира и допълва съдържанието на статиите, като определена група от потребители съблюдават за достоверността на нанесените променени (контролен орган). От гледна точка на обучението контролният орган може да е преподавател или ръководителите на екип, а потребителите да са студентите. Wikis са подходящи за групова работа и работа в екип, където студентите извършват различни дейности по един общ проект и сами изграждат учебното съдържание.

По същество всеки един от трите модела е съвместим с другите два. Например, с подходящо подбрани правила за публикуване на нови теми и с дейно участие от страна на преподавателя, един форум лесно може да добие качествата на блог. От друга страна, когато пусната тема налага съвместна работа на участниците и се изисква всеки коментар да допринася към и да надгражда учебния материал, а преподавателят, от своя страна, регулярно поддържа основна тема с обобщение на извършения до този момент труд, тогава форумът започва да наподобява wiki.

Блогът може да добие вид на форум тогава, когато се дадат права на коментиращите под статиите да бъдат и автори на нови статии, а външният изглед (theme) на системата не слага емфаза върху основната статия и тя има подобен на коментарите вид. Също така блогът може да наподобява wiki, когато потребителите имат право да редактират чужди статии или поне по същия начин, както беше описано при форумите.

Накрая едно wiki би могло да се превърне в блог (и дори като краен вариант – във форум), ако се позволят допълнителни коментари под основния труд, а правата за редактиране на статиите бъдат ограничени само до техния автор. Така че изборът на една от трите представени технологии зависи по-скоро от поставените цели. Трите определящи фактора, които могат да мотивират избора, са:

- *Свобода на дискусията* – по-малката свобода на дискусията мотивира блог (авторът контролира учебното съдържание), а по-голямата мотивира форум (в по-голяма степен, защото мнението на всеки се взема под внимание) или wiki (в по-малка степен, защото споделени мнения, които не са истинни, се премахват);
- *Контрол над учебните материали* – по-лекият контрол над учебните материали мотивира форум, а по-засиленият мотивира блог (в по-малка степен, защото се контролира основното учебно съдържание, но не и коментарите под него) или wiki (в по-голяма степен, защото контролът се извършва над всичко, което е публикувано);
- *Екипна работа* – преобладаваща нужда от екипни дейности мотивира wiki, а нуждата от самостоятелна работа мотивира блог (в по-голяма степен, особено при споделените блог платформи, където всеки участник може да бъде автор), или форум (в по-малка степен, понеже авторството на изградените учебни материали се „размива“ в дискусии).

На базата на тези основни характеристики на трите технологии би могло да се прави оценка за това с коя от трите технологии да се започне като основа в провеждането на Уеб 2.0 обучение.

В (Miyazoe, et al., 2010) е предложена още по-подробна сравнителна характеристика между трите технологии. Предложена е таблица със сравнителни характеристики, в която се описват по-конкретно някои по-специфични разлики между форумите, блоговете и wikis. Това сравнение допринася за по-обосновано мотивиране на някоя от тези технологии. След известни редакции и допълнения (с цел по-точно моделиране на традиционни учебни процеси, както и адаптация на съответни термини към българския език), въпросната таблица е представена с много леки корекции в Таблица 4.

Различните LCMS системи интегрират в себе си подобни технологии за субект-субектна комуникация. Например в Moodle стандартно (без допълнителни разширения) има налична възможност за създаване на форуми, а самата система за публикуване на учебно съдържание от страна на преподавателите има основните характеристики на блог. В Moodle има и модули за провеждане на екипни дейности, които могат ефективно да наподобят или дори напълно да възпроизведат wiki. Редица автори обаче отбелязват, че използването на „централизирана система“ (има се предвид LCMS-система, която се използва от институция и поддържа множество учебни курсове) поражда негативен ефект върху психологията на студентите и ги кара да участват по-плахо в провежданите дискусии. Такова мнение, под една или друга форма, е подкрепено в (Dalsgaard, 2006), (Rick, et al., 2005) и (Weingardt, 2004).

Критерий	Форуми	Блогове	Wikis
Подредба на части от учебното съдържание	В различни нишки (threads)	Хронологично в поредни статии	Всичко се обединява в завършен продукт
Времева ориентация за подредба на публикациите	Неподредени	От минало към настояще	Настояще
Управление на учебното съдържание	Слабо контролирано от модератори	Контролирано от автора	Отворено за всички, но рецензирано
Администриране на системата	От един или много участници	Най-често от един участник	От много участници
Редакция на публикуван материал	Обикновено не се позволява	Само от страна на автора на съдържанието	Свободно – от всички, но подлежи на рецензия
Ориентация на съзнанието на обучаемите	Към участие в процес	Към участие в процес	Към завършване на краен функционален продукт
Контрол над работния процес	Колективен	Индивидуален	Колективен
Психическа настройка за дейностите	Към обмяна на опит	Към преподаване на натрупан личен опит	Към даване на личен принос
Настроение на хората към даден вид труд	Кооперативна (cooperative – събиране на фундаментални знания) работа	Индивидуална работа	Съвместна (collaborative – събиране на знания като социална конструкция) работа

Таблица 4. Сравнение между форуми, блогове и wikis по 9 различни критерия

В (Kim, 2008), от гледна точка на обучение чрез блог (но доближено към вид на форум, защото в разисквания модел самите обучаеми са автори на основните статии в блоговете), на базата на множество разгледани литературни източници е направена сравнителна характеристика на предимствата и недостатъците на LCMS системите (в частност с фокус върху BlackBoard) спрямо употребата на обучение чрез блог. Авторът посочва два литературни източника, в които са проведени експерименти със сходни начални условия (31 на брой студенти, използване на блог като допълнение към традиционна LCMS система, незадължително участие в субект-субектната комуникация в блога), но в които се отчитат коренно противоположни резултати – за една учебна година е имало над 700 публикувани съобщения в блог системата на (Lin, et al., 2006) и само 9 в блог системата на (Divitini, et al., 2005). Според анализа, проведен в (Kim, 2008), причината за тези разнопосочни резултати е, че в експеримента от (Divitini, et al., 2005) учебното съдържание е било явно разделено между утвърдената LCMS система на институцията (където авторите са качвали основните учебни материали) и блог платформата. Там блог платформата е била свързана, но не и тясно интегрирана с този

LCMS. От това може да се направи извод, че нарушаването на основния принцип на Уеб 2.0 обучението (интегрирането на субект-субектната комуникация като неделима част от учебния материал) вероятно води до незадоволителни резултати. От същият пример могат да се потвърдят и явните предимства на Уеб 2.0 обучението спрямо „обикновеното“ веб обучение.

Съществуват и по-нетрадиционни форми на споменатите три технологични средства. Например в (Ebner, et al., 2010) авторите са разработили подобна на форум система, която е била проектно насочена (т.е. основно имаща функции на wiki, понеже студентите са работили по общ проект), в която е реализирана т.нар. „микроблог“ система – допустимата дължина на съобщенията е била ограничена до 140 символа. Проведеното изследване с тази система показва доста активно включване в екипната работа от страна на студентите – отчетени са над 11 000 разменени съобщения (под различна форма) между 34 студента за 70 дни.

На другия полюс е изследването, проведено в (Meyer, 2010), където студентите са изразили много положително мнение към блог системата, но строго отрицателно към проектно насочената работа с wiki. Масово причината за недоволството била, че студентите смятали, че други участници в екипа им пречат, изтривали са техен споделен труд, както и са изпитали определени специфични за wiki технически трудности (при добавяне на промени от двама студенти едновременно се получава конфликт, в който на единия не му бива приета промяната – този технологичен проблем е изследван в (Richards, 2009), където е предложено възможно решение). Тези два примера показват, че подборът на технологични средства, освен всичко друго, трябва да зависи и от типа студенти, на които се преподава, и да бъдат отчитани техните стилове на учене.

Също така не трябва да се допуска изучаването на самата технология – само по себе си, да е прекалено трудна задача. Това например е отбелязано в (Smith, et al., 2010), където е проведен опит за Уеб 2.0 обучение чрез системата за видеосподеляне YouTube при обучението на медицински сестри. Оказва се, че в редица случаи технологията не само че не помага съществено, а изучаването ѝ отнема ценно учебно време, което би могло да бъде употребено за изучаване на съществения учебен материал по традиционен начин. Подобен извод може да се направи и от изследването в (Meyer, 2010), където авторът заключава, че е за предпочитане да се подбират технологични средства, които са близки или са вече познати от ежедневието на студентите, а не такива, които трябва тепърва да се изучават.

В (Halic, et al., 2010) е направено изследване за употребата на блог като допълнение към традиционния учебен процес (отново с доближени към форум функции, защото обучаемите са били и автори на основни статии). В заключенията си авторите твърдо отбелязват, че *„това технологично средство работи по-добре, когато е съчетано със съвместими педагогически похвати“*, имайки предвид, че добре утвърдените принципи на дидактиката трябва да се прилагат и в обучението чрез блог. Вторият основен извод в статията е, че първоначалният досег с новата технология е афектирал възприятията за обучение и е обърнал част от обучаемите. Затова авторите препоръчват преподавателите

да дават допълнително технически инструкции и да помагат на студентите, при това до такава степен, че студентите да добият увереност в работата с новите технически средства. Авторите са категорични, че *„чувството за изградена общност може да се усили, когато едновременно и студентите, и преподавателят участват в дискусиите“*.

Подобни примери показват, че технологията сама по себе си не е предвестник за активизиране на студентите – тя е средство, което трябва да бъде подбирано внимателно и да се намира подходящото място за приложението ѝ. Тя, освен това, трябва да се интегрира в завършен организационен модел за провеждане на учебната дисциплина. Технологията трябва да е помощник на студентите, а не допълнителна „досадна задача“ за тях.

4.2.Мотивиране на избор на основен софтуер за провеждане на експеримент

С поставените изисквания и разгледаните критерии нужната система трябва да съдържа елементи едновременно на блог и на форум. Елементите на блог са свързани с нуждата преподавателят да предоставя учебни материали и да поставя домашни задания – по този начин водещото съобщение на съответната тема ще е поставено с емфаза от преподавателя, а дискусиата след нея ще бъде предимно между него и студентите. Нуждата от форум се обосновава от изискването „да е възможно студентите да обменят опит помежду си открито и/или в скрити лични съобщения“ – такова действие е нетипично за блог системите. Най-близко до поставеното изискване е да се избере система от типа дискуссионен форум, защото тя най-лесно би могла да се адаптира към поставените изисквания с допълнителни разширения, които ще бъдат използвани само в отделни теми.

Всички поставени дотук критерии се покриват от LCMS системата Moodle. В нея на основния екран на курса могат да се прикачват учебни материали, разделени на поредни уроци (учебни дейности), като между тях е възможно да се добавя и допълнителна функционалност за различни видове дискуссионни форуми. Основен плюс на системата е, че за всеки потребител се пази пълна история с дати и часове за това какви действия е извършвал в системата. По този начин преподавателите могат много подробно да проследят активността на своите студенти и да адаптират учебното съдържание спрямо нея. През учебната 2011/2012 г. в Югозападен университет „Неофит Рилски“ беше налична версия 1.9 на LCMS Moodle (след летния семестър системата беше обновена до по-нова версия). Системата поддържа въвеждане на математически формули чрез Latex, което – като основа, е достатъчно за въвеждане на учебно съдържание по линейна алгебра директно във форумите, без да се прикачват файлове от външни програми.

Като недостатък може да бъде отчетена липсата на вграден визуален редактор за формули на Latex (такъв е наличен в по-новите версии на Moodle – DragMath (DragMath, 2013), но той също не отговаря на изискванията за провеждане на интерактивно обучение по линейна алгебра, защото възможностите за въвеждане на матрици и детерминанти, както и на системи от линейни уравнения, е твърде ограничено). Поради тази причина за

целите на провеждането на експеримента се появява нужда от добавяне на допълнително разширение (модул) за Moodle, което съответно да добави тази допълнителна функционалност.

Едно много подходящо за горепосочените цели разширение е Wiris (Wiris 3.6, 2012), понеже използва интерфейс, който е много подобен на този, използван от Equation Editor в популярния продукт Microsoft Word (изучаван и в учебната програма за средното образование в България). Забележки могат да бъдат отправени и към софтуера за изобразяване на математически формули в уеб – в Moodle това се осъществява чрез предварително компилиран модул Mimetex (технология, разгледана в (Петров, 2011)), който изобразява математическите формули като картинки (не позволява копиране, вмъкване и редактиране в друг редактор), при това с предварително дефиниран като големина и тип шрифт, което силно пречи на възможностите за правене на по-специфични настройки в изгледа (theme) на системата.

Относно дискусиите в Moodle се дават много различни възможности:

- *Форум за новини* – основният форум, който съществува по подразбиране. Неговото име може да бъде сменено на „Важни съобщения“ или текст по усмотрение на преподавателя;
- *Еднократна проста дискусия* – би била подходяща за задаване на един въпрос от страна на преподавателя към всички студенти;
- *Стандартен форум за обща употреба* – може да се използва за възбуждане на непринудени дискусии между студентите, т.е. нещо, което е поставено като една от целите в предложения организационен модел;
- *По една дискусия на човек* – подходящ за поставяне на индивидуални задачи, като например обсъждане на домашните работи между студент и преподавател;
- *Форум за „въпроси и отговори“ (Q&A)* – такъв форум обикновено служи за база от данни със студентски въпроси и дискусии под тях, където се дават отговори. Обикновено, за да може един студент да разгледа въпросите на другите студенти, се поставя изискване той самият да публикува нов въпрос. По този начин се стимулира активността на обучаемите и те се подтикват да мислят по темата, за да зададат адекватен въпрос и „да не се изложат“ пред своите колеги.

Трябва да се отбележи, че всички посочени проблеми със системата Moodle са технологично решими. С намесата на администратор на сървъра е възможно софтуерният продукт да бъде преконфигуриран и настроен според поставените изисквания. Такива промени обаче би могло да навредят на други курсове, което ще наложи по-мощни преработки в учебно съдържание, а това на етап „провеждане на експеримент“ не е желателно. Поради тази причина бе преценено, че не е разумно подобни промени да бъдат правени преди експеримента – те биха били обосновани единствено ако експериментът се окаже успешен. При всички случаи основната концепция на електронното обучение ще е студентите да бъдат въведени в софтуерна система, без да изпитват никакви или почти никакви технически трудности около боравенето с нея. Стремехът е да има интуитивен интерфейс и голяма свобода на

действие (студентите да могат да вършат дейностите по множество различни начини), като по този начин преподавателят ще отделя минимално учебно време за запознаване на студентите със софтуерните технологии.

4.2.1. SimpleMachines – дискуссионен форум като основа за субект-субектната комуникация при процеса на самоподготовка

Мотивирането на избор на система за организиране на дискуссионен форум е трудна задача, понеже повечето системи предлагат сходни функционалности и се отличават с минимални разлики от потребителска гледна точка. В България Софийски университет „Св. Климент Охридски“, Югозападен университет „Неофит Рилски“, Технически университет – София, и УНСС са избрали софтуерния продукт RHPBB (RHPBB 3.0.11, 2012) за официалните форуми на университетите. Това, към този момент, е и може би най-популярният форумен софтуер в света, вероятно понеже той е един от най-старите, които в момента продължават да се разработват активно. Два основни недостатъка на RHPBB обаче мотивираха избор на друг софтуерен продукт, а именно:

- Липса на вграден редактор за форматиране на текст – такъв WYSIWYG може да бъде добавен като разширение (модул), но така би се затруднило интегрирането на технологии за въвеждане и изобразяване на математически текст;
- Липса на възможност за вкарване на HTML код в публикуваните съобщения – дори от страна на администратор, би затруднило значително интегрирането на мултимедийни презентации вътре в самите съобщения. Такива ще могат да бъдат прикачвани като файлове, които потребителите изтеглят и отварят на своя компютър, но това в известна степен нарушава принципа на Уеб 2.0 обучението за интегриране на каналите за комуникация с учебните материали в общ модул.

Така, на базата на няколко ненаучни, но популярни в Интернет изследвания (например (ForumMatrix - Compare Them All, 2009) и (Wikipedia – Comparison of Internet Forum Software (PHP), 2012)), беше избран софтуерният продукт SimpleMachines 2 (SMF 2.0.3, 2012). Справка показва, че софтуерът се използва успешно от студентски съвет в The University of Sheffield, Churchill College JCR на The University of Cambridge, в National Taiwan Normal University и др.

В (Hijon-Neira, et al., 2009) специално е отбелязано, че „наличните статистики в SimpleMachines са много по-изчерпателни спрямо тези на другите форумни софтуери“, а това е важно за електронното обучение и планирания експеримент в частност, където преподавателите трябва стриктно да следят кой студент какви действия извършва със системата. Все пак – като сравнение с LCMS система, авторите отбелязват, че статистиките в Moodle са по-пълни и по-точно разпределени за целите на електронното обучение, но за сметка на това е подчертано, че *„визуализацията там е доста по-неудобна“*.

В (Liao, et al. 2009) е направен експеримент за електронно обучение при ученици от 8-ми клас, в което е разработена среда за интерактивното взаимодействие между учениците със SimpleMachines (експерименталната група е била от 111 ученика).

Авторите на изследването не отчитат сериозни затруднения за учениците при използването на софтуера. От това би следвало да се предположи, че студентите от първи курс в университета също не би следвало да изпитат никаква трудност при регистрацията и участие в дискусии.

Стандартната инсталация на SimpleMachines покрива всички изисквания, които са поставени за експеримента, с изключение на следните:

- Няма вграден визуален редактор за въвеждане на математически текст;
- Няма вграден софтуер за визуализиране на математически текст;
- Както във всеки друг форум софтуер, няма вградена възможност за подреждане на статии по усмотрение на преподавателя, а темите се сортират спрямо тяхната текуща активност – специфично подреждане би било нужно, когато учебни материали трябва да бъдат представяни хронологично (напр. „упражнение 1“, „упражнение 2“, и т.н.).

Оказа се, че решението на третия проблем е елементарно чрез добавяне на разширение (SMF StickyTopicsOrder 0.5, 2012). Решението на първите два проблема включва добавяне на допълнителен софтуер и това е подробно разгледано в (Петров, 2011). На базата на тези проблеми бяха избрани две технологични средства – MathJax и CodeCogs Equation Editor, които са разгледани по-подробно в (Петров, и др., 2013).

4.2.2. MathJax – технология за изобразяване на математически текст в уеб страници

MathJax (MathJax 2.0, 2012) е технологично средство, написано на JavaScript, което позволява въвеждане и изобразяване на математически текст в уеб страници. Софтуерът се поддържа от всички популярни уеб браузъри, включително и редица мобилни устройства.

Интегрирането на MathJax 2.1 към съществуваща уеб страница е изключително лесно и се състои в две стъпки. Първата е да се добави javascript файла на MathJax в областта <head> на уеб страницата. Това се получава чрез добавяне на следния код:

```
<script type='text/javascript' src =  
'http://cdn.mathjax.org/mathjax/latest/MathJax.js?config=TeX-AMS-  
MML_HTMLorMML'></script> .
```

Чрез този код се добавя файла MathJax.js от CDN сървъра на MathJax (позволено е и да се свалят файловете на MathJax в директория на сървъра, на който е инсталиран сайта и да се зареждат локално). Допълнителните настройки указват кои технологии ще могат да бъдат използвани на сайта (в примера са заредени всички възможни). Втората стъпка е да се добавят специфични за уеб страницата настройки чрез подобен на следния код (отново се добавя вътре в таг <head> на страницата):

```
<script type='text/x-mathjax-config'  
MathJax.Hub.Config({tex2jax: {    inlineMath: [['[texi]','[/texi]']],
```

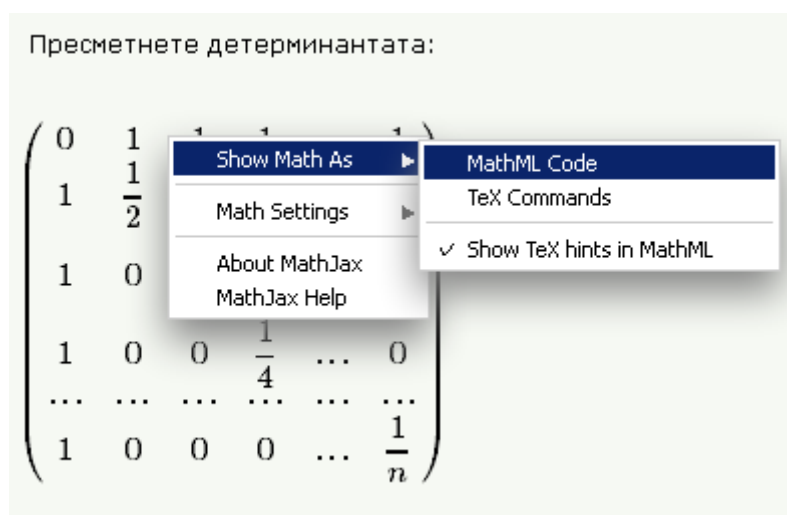
$$displayMath: [['[tex]', '/tex]']] }$$

`}}</script> .`

След като това бъде направено, всяка математическа формула, написана на LaTeX, която присъства в текста на страницата и е оградена с таговете `[tex]` и `[/tex]` или `[tex]` и `[/tex]`, ще бъде визуализирана. При това в сорс кода на страницата формулата ще остане като чист LaTeX код, което отговаря на условието да може да се индексира от търсещи машини. Относно визуализацията, шрифтът и големината му се подбират автоматично спрямо текста в параграфа, в който се намира самата формула.

Разликата между “`inlineMath`” и “`displayMath`” е, че при “`inline`” големината на формулата ще бъде скалирана така, че да може да се събере в рамките на един ред в ограждащия я текст – така тя може да се вмъква вътре в нормален текст и да не попречи на форматирането на параграфа. При “`display`” формулата винаги ще бъде в нормалната големина на шрифта и на нов ред.

Що се отнася до копирането на визуализирани формули и пренасянето им в друг софтуер, това може да бъде осъществено чрез щракване с десния бутон на мишката върху формулата, както е показано на фигура 7.



Фигура 7. Извличане на MathML и TeX код от формула с MathJax

Копираният като MathML код може да бъде вмъкнат директно в Microsoft Word 2007 или в по-нова версия (текстовият редактор ще го конвертира автоматично към формат за MathType) или OpenOffice, а копираният TeX код е напълно съвместим с редактори на LaTeX.

4.2.3. CodeCogs Equation Editor – технология за въвеждане на математически текст

Основен проблем при писането на формули на LaTeX е, че се изискват знания за специфичния синтаксис, на който се пишат командите. Това отнема допълнително време за обучение на студентите, което естествено би било хубаво, ако може да бъде спестено или поне максимално намалено. На помощ идват визуалните редактори за LaTeX код. Съществуват много такива самостоятелни приложения, но тези, които могат да се

интегрират в уеб страница, все още са прекалено малко. Такива например са разгледани в (Петров, 2011) – Connexions, DragMath, FireMath и Wiris за MathML, и ZohoWriter и Wiris за Latex. Повечето обаче страдат от различни недостатъци – нямат достатъчно добра поддръжка в различни интернет браузъри, изискват инсталация на допълнителен софтуер на сървър/клиентската машина или не са безплатни. От всички изброени по-горе Wiris (добил популярност около лесната си интеграция с Moodle) се доближава максимално до поставените изисквания, но не е безплатен. Редакторите Connexions и ZohoWriter също не са безплатни, DragMath не е достатъчно пълноценен откъм възможности за писане на по-сложни формули и изисква инсталиране на Java, а FireMath не работи с различни от Firefox браузъри. Затова фокусът на изследването е поставен върху един „смесен“ редактор – CodeCogs Equation Editor (CodeCogs Equation Editor, 2013), в който се редактира код на Latex в текстови вид чрез възможността за вмъкване на шаблони (заготовки) чрез визуални контроли.

Представеният редактор се зарежда автоматично като скрипт от уеб сайта на разработчиците. Позволява се както интегриране към съществуващи редактори (като например популярния TinyMCE, използван често във форуми и блогове), така и зареждане в нов прозорец (рорър). Вторият начин за интеграция е съществено по-лесен, защото не изисква сериозни интервенции по сорс-кода на приложението. Първата стъпка е да се вмъкне зареждащият скрипт в областта <head> на страницата чрез следния код:

```
<script type="text/javascript" src="http://latex.codecogs.com/editor3.js"></script> .
```

Втората стъпка е да се вмъкне картинка или текст с връзка вътре в тялото на страницата, при последване на която ще се зареди въпросният прозорец. Това може да се направи например по следния начин:

```
<a href="javascript:OpenLatexEditor('BOXID','phpBB','bg-bg',false,'','full');">
Вмъкни формула</a>
```

Както се вижда, извиква се функция OpenLatexEditor, на която се подават 6 параметъра. В първият параметър трябва да се подаде BOXID, което е името на идентификатора на текстовото поле, в което се въвежда текстът (взима се от <textbox id=... на текстовото поле, в което ще се пише на страницата). Този параметър е изключително важен, защото указва на редактора къде да вмъкне формулата и съответно къде да върне фокуса при натискане на бутона за вмъкване на кода.

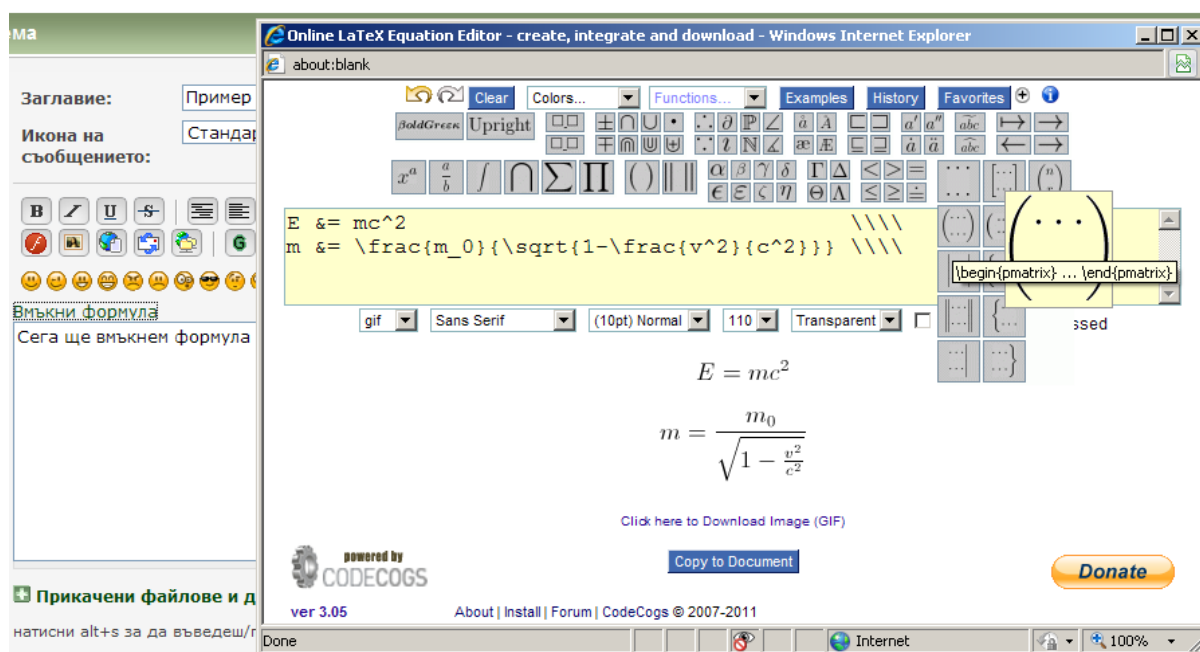
Вторият параметър е името на тага, който ще огради текста. В случая в примера е представен параметър с име “phpBB”, понеже той ще генерира таг [tex] и [/tex], което беше избрано и в примера за инсталация на MathJax. Други възможности за този параметър са представени в сайта на производителя и са следните:

- type: Example Output
- latex: \$1+\sin(x)\$ or $\backslash[1+\sin(x)\backslash]$
- doxygen: $\backslash f \$ 1+\sin(x) \backslash f \$$ or $\backslash f [1+\sin(x) \backslash f]$
- phpBB: [tex]1+\sin(x)[/tex]

- tw: `[img[http://www.codecogs.com/gif.latex?1+sin(x)]]`
- html: ``
- pre: `<pre xml:lang="latex">1+sin(x)</pre>`

Третият параметър контролира езика. Четвъртият контролира самия редактор и това дали кодът в него ще бъде генериран на един ред, или може да бъде на няколко (препоръчително е кодът да е на един ред, защото в противен случай може да се появят проблеми с визуализацията от страна на MathJax). Петият параметър (който в примера е празен) е възможност за добавяне на код на LaTeX, който да бъде зареден по подразбиране в редактора (това е удачно тогава, когато в процеса на обучение се решават типови задачи). Последният параметър контролира дизайна на редактора. Стандартните стойности са “mini” и “full”, като разликата е в броя на бутоните в менюто. Реално редакторът позволява да бъдат добавяни и премахвани всякакви бутони от главната лента.

При показаната конфигурация редакторът ще се отваря в нов прозорец, след което ще може да се използват визуалните контроли, показани с пример на фигура 8. При натискането на бутон от менюто ще бъде генериран автоматично шаблон на LaTeX. При попълването на шаблона ще се визуализира картинка под текстовото поле, която в реално време показва как изглежда формулата. При натискане на бутона “Copy to document” кодът от редактора ще бъде пренесен в текстовото поле на страницата на сайта, като самият код ще бъде ограден автоматично от съответния таг (в примера [tex] и [/tex]).



Фигура 8. Писане на формули в CodeCogs Equation Editor

Както се вижда от примера – редакторът не е изцяло визуален (каквито например са MathType в Word или Connexions, DragMath и Wiris за уеб страници). Това може да бъде отчетено като голям недостатък, ако редакторът трябва да бъде използван при обучение с ученици и студенти, които нямат сериозна подготовка за работа с компютър и нямат опит с писане на код. От друга страна, при обучението на студенти по математика,

информатика и технически науки, както и при обучение на ученици от математически гимназии, това може да бъде отчетено и като предимство, понеже по интуитивен начин (с шаблони) запознава потребителя с писането на код на LaTeX. А това са допълнителни знания, които не са излишни в обучението по математика.

4.2.4. Организиране на форумите, групите и правата за достъп

Първият експеримент през учебната 2011/2012г. експеримент предвижда употреба на форума с една учебна група, но през учебната 2012/2013г. се очаква да се включат различни учебни групи от различни специалности. Поради тази причина са проектирани следните две основни форумни групи:

- Общ форум, достъпен от всички регистрирани в системата потребители – в него преподавателят публикува в хронологичен ред учебните материали (упражненията), дава връзки или прикачва софтуерни продукти, подпомагащи решаването на задачи по линейна алгебра, качва мултимедийни презентации и видео клипове, и др. На студентите се позволява да провеждат дискусии за всеки един публикуван ресурс. Чрез общия форум се реализира функционалност, подобна на основния екран на Moodle, където преподавателите прикачват своите упражнения;
- Частен форум за всяка една отделна учебна група – в него се публикуват условията за домашни работи на студентите, също така се позволява и свободна дискусия, но ограничена до потребителите от учебната група. Форумът е направен частен, за да може да бъде ограничено количеството на домашни задания, които подготвя преподавателят, т.е. да може да дава едни и същи задания на студенти от различни специалности, без те да ги виждат помежду си и да копират наготово решения.

На регистрационната форма на форума се изисква въвеждане на следната информация от всеки студент:

- Потребителско име;
- Парола;
- Адрес на електронна поща;
- Име и фамилия;
- Специалност (избира се от предоставени възможности);
- Факултетен номер.

Процесът е сходен с този на „саморегистрация“. В (Тупаров, 2009) е изказано притеснение, че това „*предразполага към неконтролируемо саморегистриране на потребители, които не са свързани с учебната институция*“. Поради тази причина за достъп до форумите регистрацията не е автоматична, а изисква активиране на акаунта от преподавател (целта на тази форма за регистрация е да не се допускат външни хора в системата). Определянето на групата (откъдето и комплекта с права за достъп до различните ресурси) на всеки новорегистриран потребител се дефинира по време на активирането на акаунта чрез избор от падащо меню. В (Тупаров, 2009) процесът на

саморегистрация е описан като свободен или с активационен код. Другите два варианта, които се препоръчват, са локално служебно администриране (преподавателят сам зарежда акаунти на студентите в системата) или външно служебно администриране (използват се данни от външна система). В разработения модел за регистрация може да се заключи, че е направена смесица от модел на саморегистрация и локално служебно администриране – всякакъв човек може да пожелае достъп до форумите, но само и единствено преподавателят одобрява достъпа до определени ресурси.

Отново в (Тупаров, 2009) се казва, че *„саморегистрацията не е подходяща за приложение в академичните образователни институции, особено, ако електронното обучение е част от регулярния учебен процес“*. Причината за този извод е че *„обикновено студентите се регистрират вяло и в дълъг период от време“*. Този проблем би следвало да бъде очакван в приложения модел на регистрация, но в значително намалена степен. Причината за оптимистичното очакване е, че според организационния модел преподавателят ще поставя много стриктни срокове за предаване на домашните работи, т.е. студентите ще са мотивирани да се регистрират в самото начало, ако желаят да спазят сроковете. Това впрочем е и основната мотивация за избора на този „смесен модел на регистрация“ – използват се предимствата на саморегистрация (пестене на време на преподавателя).

4.2.5. Разработка на учебни материали за запознаване на студентите с процеса на електронно обучение

Освен въвеждането на поредицата от упражнения (дефиниции, теореми и задачи) в средата за електронно обучение, има нужда и от създаване на обучителни материали за работата със самата среда. Целта на тези материали е да подпомогнат включването на студентите в интерактивния процес на взаимодействие. Такива учебни ресурси бяха създадени чрез помощта на научен проект „Технологии и методика за разработване на мултимедийни симулационно базирани учебни обекти, 2011 г., SRP група А, проект № 6 към Югозападен университет “Неофит Рилски”, а именно:

- Видеодемонстрация и симулация (в MP4 видео- и Flash анимация) за въвеждане на матрици чрез Equation Editor в Microsoft Word 2007 или по-нов;
- Видеодемонстрация и симулация (в MP4 видео- и Flash анимация) за въвеждане на системи от линейни уравнения чрез Equation Editor в Microsoft Word 2007 или по-нов;
- Видеодемонстрация и симулация (в MP4 видео- и Flash анимация) на общ принцип на действие при въвеждане на математически формули чрез CodeCogs Equation Editor в SimpleMachines;
- Видеодемонстрация и симулация (в AVI видео и като Flash анимация) за въвеждане на системи от линейни уравнения чрез CodeCogs Equation Editor (въвеждането на система от линейни уравнения чрез езика Latex си има някои специфични особености, които не са интуитивни за начинаещ потребител);
- Видеодемонстрация и симулация (в AVI видео и като Flash анимация) за въвеждане на разширена матрица на система от линейни уравнения чрез

CodeCogs Equation Editor (разширената матрица се представя като една матрица и един вектор стълб от свободни членове, които са долепени една до друга и оградени със съответните видове скоби);

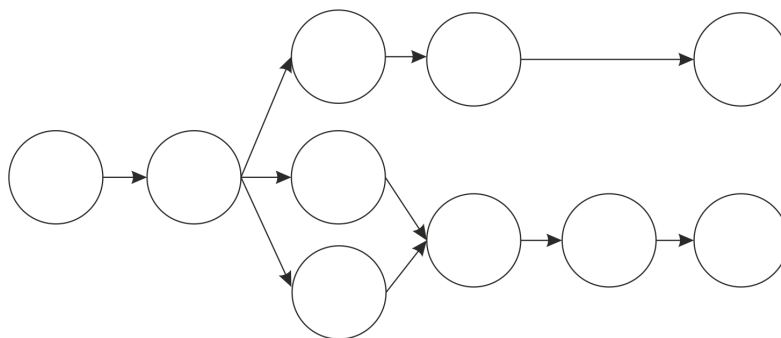
- Примери (чрез картинки и пояснителен текст) за копиране на вече написан във форума математически текст (например копиране на матрица от условието на задача, дадена за домашна работа) и вмъкването на този текст в CodeCogs Equation Editor или в Equation Editor на Microsoft Word 2007 или по-нов;
- Подробно ръководство за писане на математически формули на езика LaTeX, заедно с примерен код и непосредствена визуализация на всеки пример.

4.2.6. Усъвършенстване на теорията за автоматично оценяване при диалогово-обучаващи програми

Досегашният модел на автоматично оценяване в диалогово-обучаващи програми е прекалено обобщен и вероятно би бил труден за употреба в практическа ситуация. Затова е важно теоретичният модел да бъде разширен, като бъде по-адаптируем и да може да се прилага в опростен вид за специфични цели. Това може да бъде постигнато, като се наложат допълнителни ограничения (филтри) по време на конструирането на диалогово-обучаващата програма, така че тя да спазва предварително дефинирани критерии. Слагането на такива филтри прави така, че разработчикът на учебния материал не би могъл да допусне грешки, които да нарушат принципите на обективното оценяване на модела, който той следва. Обратно, премахването на такива филтри би довело до по-голяма свобода за разработчика, а това е нещо, което би било приветствано от опитните автори на учебно съдържание, които биха желали да имат по-голяма гъвкавост или например имат нужда да експериментират. Предложените по-нататък в главата „режими на оценяване“ са докладвани през 2013г. на семинар във връзка с научно-изследователски проект „Иновативни методи за оценка на компетенции в среди за електронно обучение“, №ДФНИ-И01/10 на национален конкурс „Финансиране на научни и научноприложни изследвания в приоритетните области“ към Фонд Научни Изследвания на Министерство на Образованието, Младежта и Науката, 2012г.

С цел по-ясна демонстрация, нека бъде разгледан примерен граф, показващ три възможни пътища на учене, представен на фигура 9. Първият връх в графа (от ляво-надясно) представлява „входната точка“ на задачата. Върховете в крайно дясно са „края на задачата“. Всеки един връх сам по себе си е задача-компонента (подзадача) в диалогово-обучаващата програма. Всяка една такава подзадача „ i “ съдържа в себе си коефициентите за оценяване, а именно:

- $a_{i,j}$ – коефициент (брой точки) за поредна използвана помощ;
- $b_{i,m}$ – коефициент за конкретна предвидена грешка;
- $b_{i,m+1}$ – коефициент за непредвидена грешка;
- c_i – положителен коефициент за дадена подзадача.



Фигура 9. Примерен граф, показващ различни пътища на учене

От графиката от фигура 9 се вижда, че е съвсем възможно по един път за учене да се преминат повече подзадачи спрямо друг. От най-съществено значение за общата структура на целия граф са коефициентите “ c_i ” – те дефинират максималния брой точки, които могат да се получат на дадена подзадача, съответно влияят на максималния сбор точки, които могат да се получат, преминавайки по даден път за учене. Предложените филтри, наричани по-долу “режими на работа”, ще оказват влияние именно върху коефициента “ c_i ” на подзадачите. Останалите коефициенти – тъй или иначе, са зависими от “ c_i ”, затова правилата индиректно им влияят.

Режим 0: Обучителен режим без оценяване

В обучителния режим коефициентите не се използват за формиране на оценка и такава оценка не се дава на обучаемия след преминаването по даден път в графа. Още повече – тези коефициенти може въобще да не бъдат въвеждани. Този режим е възможно най-свободен. При него статистическата информация, която се пази, има отношение само за информация относно възможното усъвършенстване на диалогово-обучаващата програма.

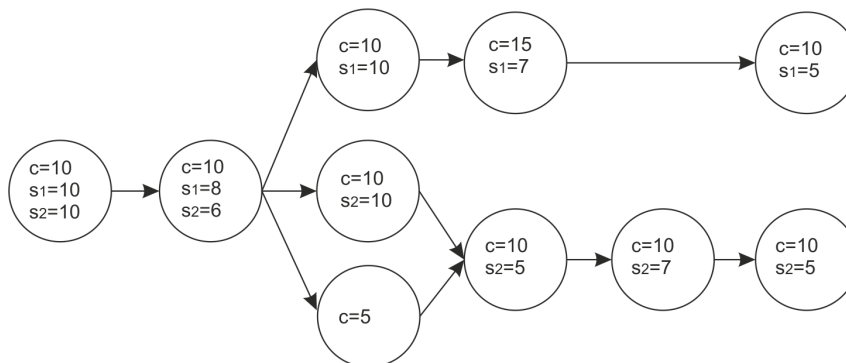
Режим 1: Свободно нанасяне на коефициенти

При свободното нанасяне на коефициенти, разработчикът на диалогово-обучаващата програма има пълна свобода за определяне на коефициентите “ c_i ”. Така той би могъл да дава по-голяма тежест на дадена подзадача спрямо други, както и дори да дава различен общ сбор от точки при преминаване по различните пътища на учене. Един примерен сценарий е демонстриран на фигура 10. В него, във върховете на графа, са отбелязани с “ c ” максимален брой точки за подзадачата, а “ s_1 ” и “ s_2 ” са точките, които са събрали съответно студент 1 и студент 2 за тази подзадача след като са преминали по своя път в графа успешно.

Първо трябва да се отбележи, че различните пътища носят различен възможен максимален брой точки. Пътят, по който е преминал s_1 в графа, носи максимално 55 точки, а пътят на s_2 носи максимално 60. Трябва да се отбележи и обстоятелството, че един път носи по-малко точки от друг, което съвсем НЕ означава, че крайната оценка по този път ще бъде по-ниска. Оценките по различните пътища в този режим са независими една от друга, защото крайната оценка на всеки студент се получава чрез нормиране по формулата:

$$O = 2 + \frac{4P}{Q},$$

където P е броят точки, които студентът е получил по неговия път, а Q е максималният брой точки, които той може да получи по него.



Фигура 10. Примерен граф за режим на оценяване 1

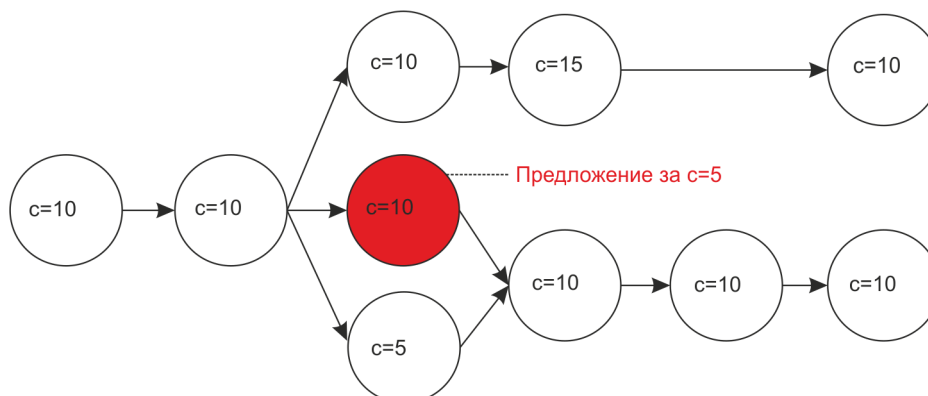
От примера на фигура 10 студент „s₁” би получил закръглена оценка „мн. добър” (4,90), получавайки общо 40 точки, а студент „s₂” би получил закръглена оценка отново мн.добър (4,90), но с общо получени 43 точки. Причината за това „разминаване“ е именно, че по „пътя на s₁” максималният възможен сбор от точки е по-малък от „пътя на s₂”.

Получаването на едни и същи оценки при различен брой точки не би било прието добре от студентите. Още повече – възможното получаване на по-ниска оценка при събрани повече точки дори би довело до евентуален конфликт. Даването на обяснения, че „цената на точките“ по различните пътища на учене е различна, едва ли биха били приети като разумен аргумент от студент, който спори за своята оценка. Поради тази причина примери като този, показан на фигура 10, би трябвало да се считат за лоши за педагогическата практика при оценяването. Ако обаче точките останат скрита информация, която е само за вътрешна употреба от преподавателя, а студентите виждат само и единствено своите крайни оценки, тогава този режим би могъл свободно да се използва и в практиката.

Режим 2: Фиксиран максимален общ брой точки по всички различни пътища на учене

Най-лесното разрешаване на посочения в режим 1 проблем би било да се постави ограничение (филтър), с което системата за разработка на диалогово-обучаващи програми да гарантира, че всички пътища от началото до края на задачата са „равностойни“, т.е. дават еднакъв максимален общ брой точки. По време на конструирането на задачата (добавянето на различни подзадачи една по една по различните пътища за учене) едва ли би било възможно програмата да предвиди бъдещите действия на разработчика. Затова този филтър трябва да се изпълнява по време на „финализацията“ на задачата, т.е. тогава, когато разработчикът реши да я съхрани и пусне в практическа употреба.

Най-елементарният вариант би бил програмата да изчисли общия брой точки по всеки възможен път от начало на графа до неговия край и, ако съществуват разлики, да бъде изведено съобщение, че са необходими корекции. Една „по-интелигентна“ система би направила евентуален анализ и би дала насоки за възможни корекции, например, както на фигура 11.



Фигура 11. Предложение за промяна в режим на оценяване 2

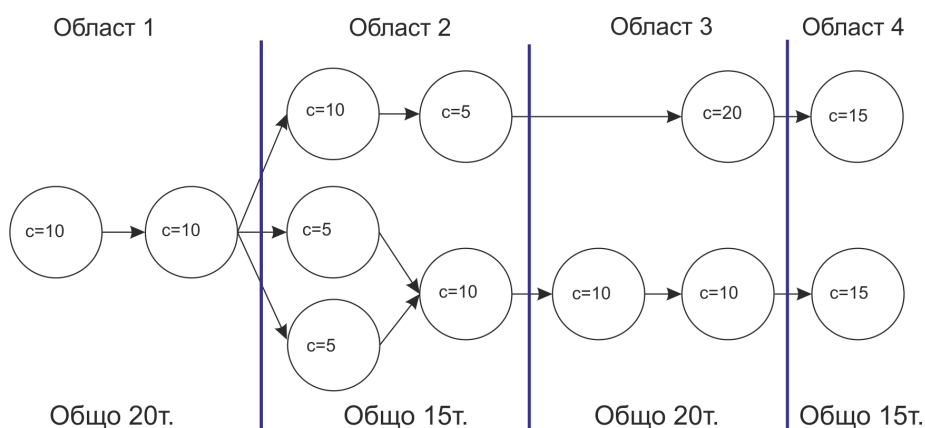
Разбира се, толкова конкретна промяна, каквато е предложена в примера, не би била възможна при един по-сложен дълъг граф с множество разклонения. В по-сложни сценарии програмата би следвало да маркира „области“ (поредица от няколко подзадачи) като „проблемни“. В крайна сметка спазването на режим 2 гарантира, че общият сбор точки по различните пътища ще бъде един и същ, съответно точките ще имат еднаква „цена“, независимо от пътя, по който са получени. Трябва да се отбележи, че корекциите на коефициентите „ c_i “ неизбежно водят със себе си и нужда от корекция на коефициентите „ a_i “ (помощи) и „ b_i “ (грешни отговори). Би било удачно тяхната корекция да е възможна и като автоматична (процентно всички тези коефициенти да се променят с толкова, с колкото се е променил коефициент „ c_i “).

Режим 3: Разделяне на задачата на области, съдържащи групи от подзадачи

В този режим разработчикът на диалогово-обучаващата програма задава предварително „шаблон“ от абстрактни области, които впоследствие трябва да спазва. Например, ако разработчикът работи по таксономията на Блум, той може да определи първоначално пет области като „Знание“, „Разбиране“, „Прилагане“, „Анализ“ и „Синтез“, а за всяка от тях да определи собствена „тежест“ (максимален брой точки, който може да бъде събран в дадената област). Така например, ако разработчикът е сметнал, че областите трябва са равностойни и всяка една трябва да носи по една единица към оценката, той би могъл да раздели задачата на 4 части и да каже, че всяка една от тях носи по 25 точки, т.е. общо 100 за цялата задача (реално, в такъв класически случай всяка област/група от подзадачи ще носи по една единица от оценката).

От тук нататък задача на компютърния софтуер е да следи дали наистина всяка една област и всички пътища, които се съдържат в нея, ще покриват предварително зададените изисквания. Начинът за оценка на всяка област по същество ще използва същата евристика, която е използвана в режим 2.

В този режим сборът от точките за всяка подобласт не е фиксиран. Това означава, че е възможно да бъде давана по-голяма тежест на дадена група знания спрямо друга. Например, ако разработчикът работи по таксономия на Блум, той първо би дал серия от задачи, с които се оценява етапът на „знание“ от страна на обучаемия, и за групата знания да цели даване на оценка „среден 3“, т.е. една единица към оценката или например 25 от 100 точки. След това той може да даде на „разбиране“ и „прилагане“ по-малко точки, например общо 25 точки (една единица към оценката) от двете, а областите „анализ“ и „синтез“ да дават отново по 25 точки всяка (съответно целийки да се получат оценки 5 – при умения за правене на анализ, и 6 – при умения за правене на синтез). Един схематичен пример с разделяне на задача на 4 области е даден на фигура 12.



Фигура 12. Разделяне на задача на области от подзадачи

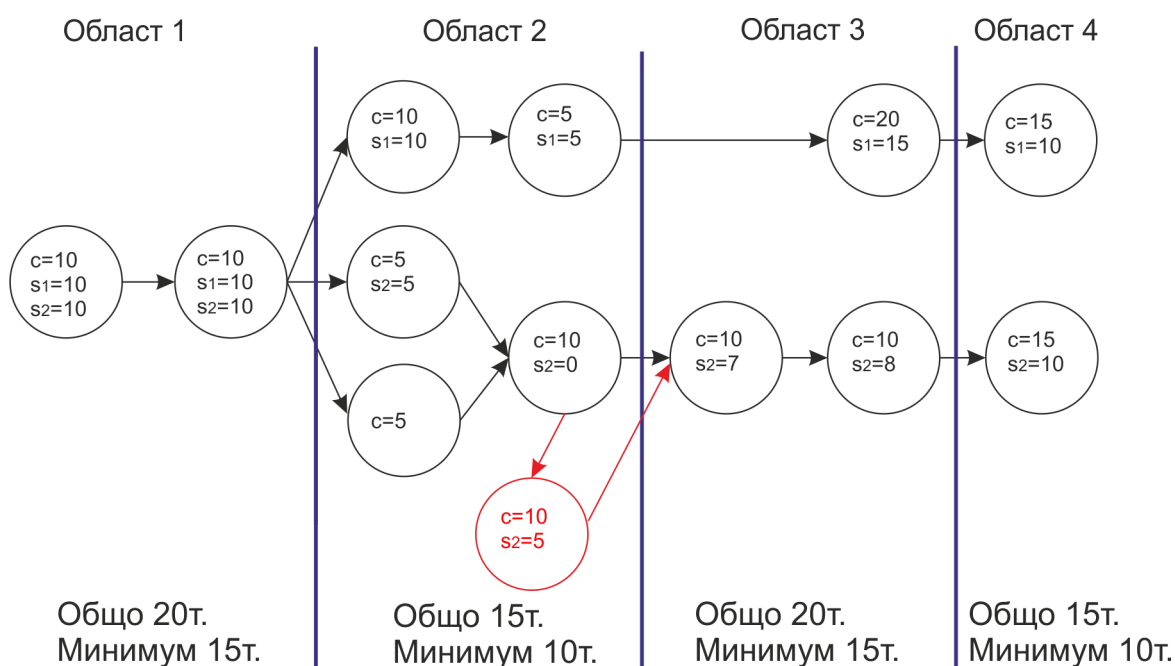
Трябва да се отбележи, че „тежестите“ на различните подзадачи вътре в съответните области може да са различни. Също така е възможно в една област да има много повече подзадачи, в сравнение с друга друга.

Режим 4 (обучителен): Задължително събиране на минимално количество точки от област и пропускане на задачи от област

Когато се прилага дадена таксономия, е редно да се има предвид, че е прието нивата „да се взимат“ последователно. Например, не би било нормално един студент да получи 0 точки на етап „разбиране“ и да бъде отличен на етапи „анализ“ и „синтез“ по таксономията на Блум. Едва ли е възможно някой човек да може да анализира и синтезира знания, ако той не ги разбира. Що се отнася до оценяването, подобни аномалии са възможни в предложените досега режими. Обикновено наличието на подобна аномалия би трябвало да бъде отчетено от софтуерния продукт и то да бъде изведено като съобщение за евентуален проблем към преподавателя – например възможно преписване. В процеса на обучение обаче, където целите на диалогово-обучаващата програма са съвсем други, би следвало да се реализира съвсем различен подход, а именно:

- Ако даден студент е показал, че няма необходимите знания, за да „премине напред“ (към друга област, т.е. следващо ниво в обучението), да му бъдат предоставени допълнителни подзадачи от текущата му област, за да може да навакса пропуснатите знания. Това предполага наличие на допълнителни задачи

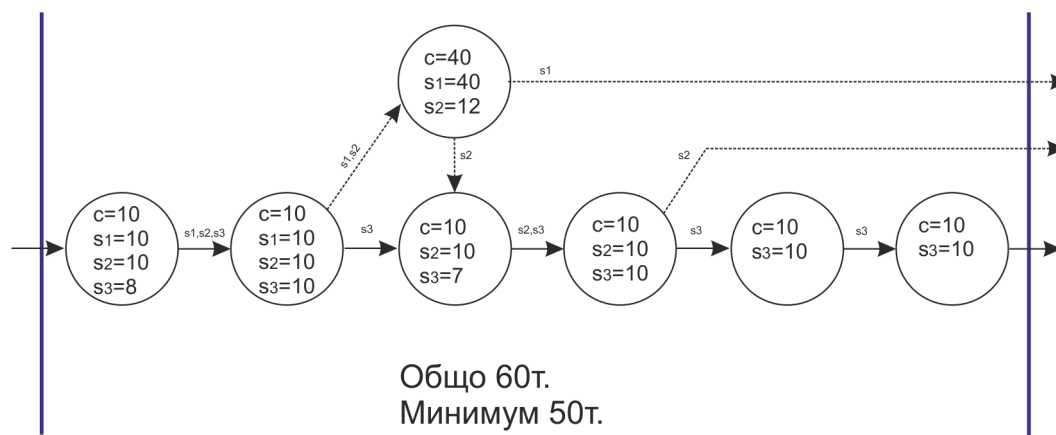
в бази от данни, които да могат да бъдат добавяни динамично (и адаптирани!) в пътя/процеса на учене на студента. За да може да бъде реализирана подобна функционалност, трябва да се добави допълнителен идентификатор за всяка задача-компонента, който да указва към коя област от процеса на обучение тя принадлежи. Също така е нужно да се добави списък от знания, които тази задача-компонента проверява. Така, ако системата за управление на диалогово-обучаващи програми отбележи, че даден обучаем има пропуски в точно определени знания, той би могъл да подбере подходящи допълнителни задачи от базата от данни – така, че да позволи на обучаемия да навакса пропуснатото. Разбира се, този процес не може да продължава до безкрайност – при устойчиво показване на пропуски би следвало обучаемият да бъде насочен към консултация с преподавател. Примерен сценарий е показан на фигура 13. В него студент s_2 е изпитал затруднение при преминаването от област 2 към област 3 и съответно програмата е добавила (само за него) допълнителна самостоятелна задача;



Фигура 13. Допълнителна задача за покриване на минимум от знания

- Когато са предвидени множество задачи от дадена област, а студентът покаже, че може да решава задачите отлично (решил е няколко задачи последователно, събирайки максимален брой точки за тях), то е удачно този студент да бъде препратен към обобщаваща за тази област задача (с повишена трудност), след успешното решение на която да премине директно към следващата. По този начин няма да бъде загубено време на този студент със задачи, които за него биха били тривиални и лесни. Ако обаче студентът не успее да се справи с обобщаващата задача успешно, то би следвало да бъде препратен обратно към основния набор от задачи. Едно примерно изпълнение с трима студенти е показано на фигура 14. При тях s_1 е показал отличен успех, справил се е с първите задачи и с

обобщаващата задача и е преминал напред, s_2 се е справил с първите задачи отлично, но се е провалил на обобщаващата задача, заради което е върнат назад, а s_3 е преминал през подзадачите „по стандартен начин“, т.е. с минимални грешки. За удобство над всяка стрелка е указан студентът, който се „движи“ по нея. Преходите с пунктир указват „нестандартен“ преход, т.е. такъв, който е станал чрез пропускане на възли.



Фигура 14. Пропускане на задачи от по-добре подготвени студенти

Допълнителната трудност за разработчиците в този режим се явява нуждата от изготвяне на допълнителни задачи, както и въпросната „обобщаваща за областта“ задача. Иначе действията по „нестандартните“ преходи би следвало да се поемат автоматично от софтуера.

Режим 4 (при оценяване): Спиране на процеса на оценяване при непокриване на минималните точки за дадена поредна област

В този режим, ако някой от студентите не покрие минималния сбор точки за дадена област, неговият път се прекъсва и той директно бива препратен към края на задачата, където се изчислява неговата оценка. Въпросният режим би бил подходящ при спазване на таксономия, като подзадачите са подредени по тип и трудност (от задачи-компоненти към обобщени задачи), а невъзможността да се преодолее даден етап в оценяването би предполагала невъзможност за справяне с всички следващи етапи. По този начин се преодоляват аномалиите, в които, според таксономията на Блум, даден студент има слаб 2 при „разбиране“ и „прилагане“, но има висока оценка при „анализ“ и „синтез“. За подобни случаи обикновено се смята, че са плод на преписване (измама). Този режим би предотвратил теоретичната възможност за достигане до подобни парадокси. Естествено, редно е да се отбележи, че факторът „преписване“ все още не е премахнат.

Стриктен (лесен) режим (при оценяване): Поставяне на строги норми в „точкуването“ на подзадачи

Възможно е въвеждането на „стриктен“ режим, в който задачите се съставят по предварително определен шаблон за оценки. В такъв режим може да се смята, че всяка подзадача трябва да дава точно определен брой точки, който е еднакъв за всички подзадачи, съответно „цените“ на помощите a_i и грешките b_i също могат да бъдат

предварително фиксирани. По този начин се ограничава свободата на разработчика (намаляват се възможностите за даване на нестандартни пътища за учене и подзадачи, които се различават съществено от останалите), но силно се улеснява създаването на диалогово-обучаващи програми с адекватно оценяване. Именно поради тази причина режимът, освен „стриктен“, е наречен и „лесен“. При това трябва да се отбележи, че този филтър е приложим като допълнение с останалите, които бяха изброени преди това. А именно:

- **Стриктен режим 1:** Позволен са пътища за учене с различна „дължина“ (брой подзадачи), съответно е възможно при различни пътища да се получи различен сбор точки, но всяка подзадача сама по себе си има една и съща тежест с останалите подзадачи в системата;
- **Стриктен режим 2:** Всички пътища за учене са еднакво „дълги“ и всички подзадачи в системата са с една и съща тежест към крайната оценка;
- **Стриктен режим 3:** Същото, както при стриктен режим 2, като в допълнение отделните области съдържат равен брой подзадачи;
- **Стриктен режим 4:** Същото, както при стриктен режим 3, като в допълнение, ако даден студент не успее да събере необходимия минимум точки за дадена област, той приключва сесията си и отива директно в кадъра с формиране на крайна оценка.

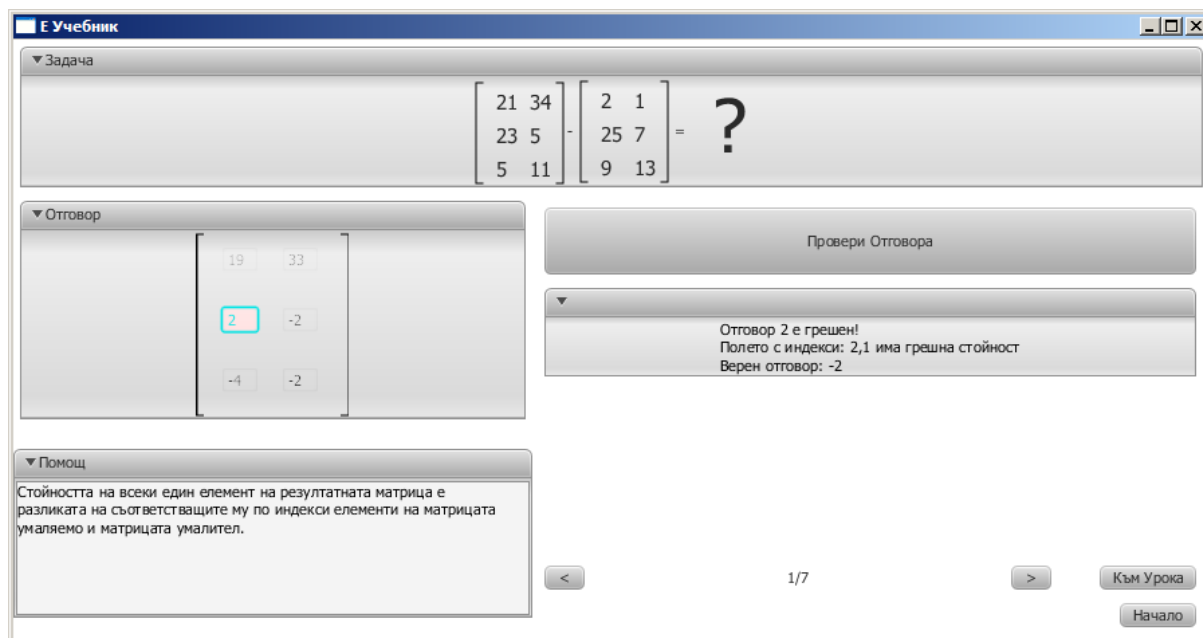
4.3.Разработка на диалогово-обучаващи програми за обучение по линейна алгебра

С помощта на студенти са разработени три дипломни работи със софтуерни продукти за програмирано обучение (на базата на опростена схема за диалогово-обучаващи програми), които са внедрени като допълнителни ресурси в средата за електронно обучение. Трябва да се отбележи, че софтуерните продукти бяха подготвени за основния експеримент през учебната 2012/2013 г., но не бяха налични при пилотния от учебната 2011/2012 година.

4.3.1. Софтуер за самоподготовка по темата „матрици и операции с матрици“

Дипломната работа (Дончев, 2012) е рецензирана и защитена пред изпитна комисия с оценка отличен 6 в катедра Компютърни системи на Техническия университет – София. Авторът на дисертацията е дипломен ръководител. Разработена е и платформа, която може да послужи като библиотека за улеснение на разработката на други подобни продукти за интерактивно обучение. Средата за разработка е програмният език Java. Стартирането на програмата изисква налични инсталирани Java Runtime Environment с включен JavaFX (двете са вградени в софтуерния пакет Java Development Kit). Софтуерният продукт предоставя поредица от „уроци“, като към всеки от тях има добавен модул за решаване на задачи. При задачите е реализирана система за проверка на отговора, като при грешен отговор тя показва точно коя стойност в матрицата е сбъркана. Важно е да се отбележи, че задачите се генерират динамично, а не са предварително дефинирани. Предоставя се възможност за помощ, включително и

конкретна, при предварително дефинирани като известни грешки. Преизползваемата платформа предоставя общите части от графичния интерфейс и помощни класове за съставяне на уроци. Потребителският интерфейс, както и съдържанието, са изцяло на български език. Учебните материали (уроците и съответната логика за генериране на задачи) се включват като модули, които се пакетират в JAR файлове (които сами по себе си са обикновени ZIP архиви). Примерен екран от приложението е показан на фигура 15.



Фигура 15. ДОП за задачи с матрици и операции с матрици

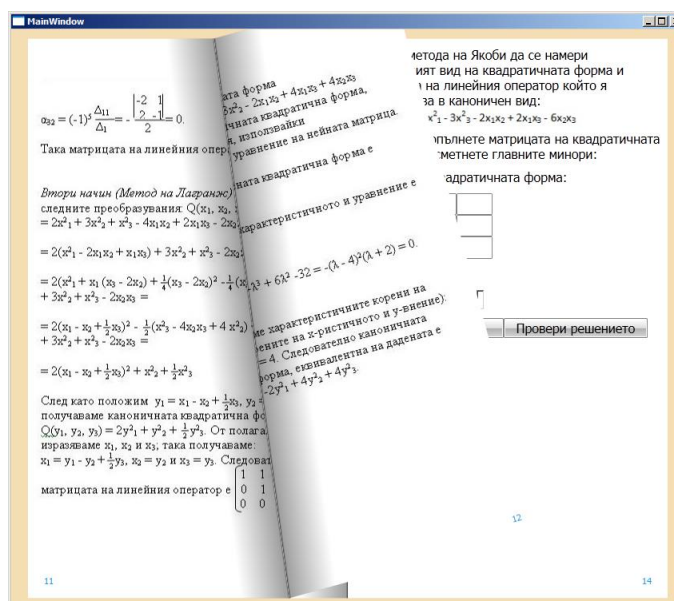
4.3.2. Софтуер за самоподготовка по темата „квадратични форми“

Дипломната работа (Стоичков, 2012) е рецензирана и защитена пред изпитна комисия с оценка отличен 6 в катедра Компютърни системи на Техническия университет – София. Авторът на дисертацията е дипломен ръководител. При прегледа на съществуващи софтуерни продукти не беше намерен пример за програма, която е специализирана за обучение по темата „квадратични форми“, което прави софтуерния продукт много иновативен в областта на електронното обучение по Линейна алгебра.

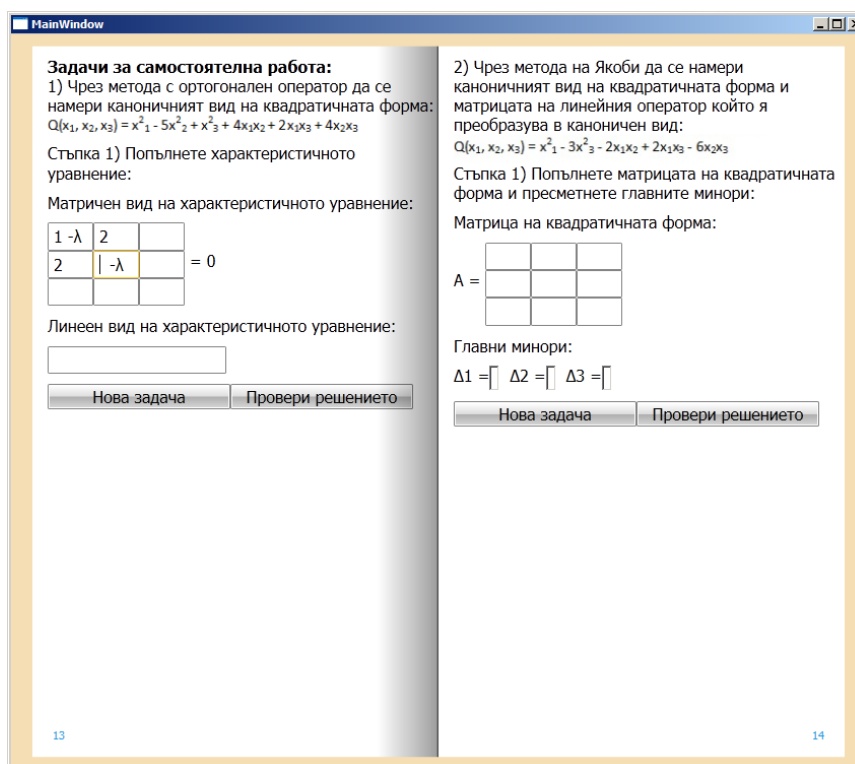
Програмата е написана на програмния език C# с WPF на .NET Framework 3.5 и не изисква инсталация на потребителския компютър – с изключение на стари инсталации на компютърни системи с Microsoft Windows XP, на които е възможно да няма добавен .Net Framework. Тази програма би трябвало да тръгва безпроблемно на всякакви компютри с обновен Microsoft Windows XP, както и без никакви модификации при Microsoft Windows версии Vista, 7 и 8.

Интерфейсът на софтуерния продукт представлява симулация на традиционен хартиен учебник. Включена е визуализация на прелистване на страници на книга (фигура 16). Първите 12 страници включват теоретичен материал (дефиниции, теореми и примери) по темата „Квадратични форми“, взети от учебник по Линейна алгебра и аналитична геометрия (Доневска, и др., 1994). На последните три страници се

предоставят задачи за упражнение, в които студентите трябва да решат съответни задачи (фигура 17) за канонизация на квадратични форми по два различни метода – на Якоби и на Лагранж.



Фигура 16. ДОП за задачи от темата „квадратични форми“ – 1



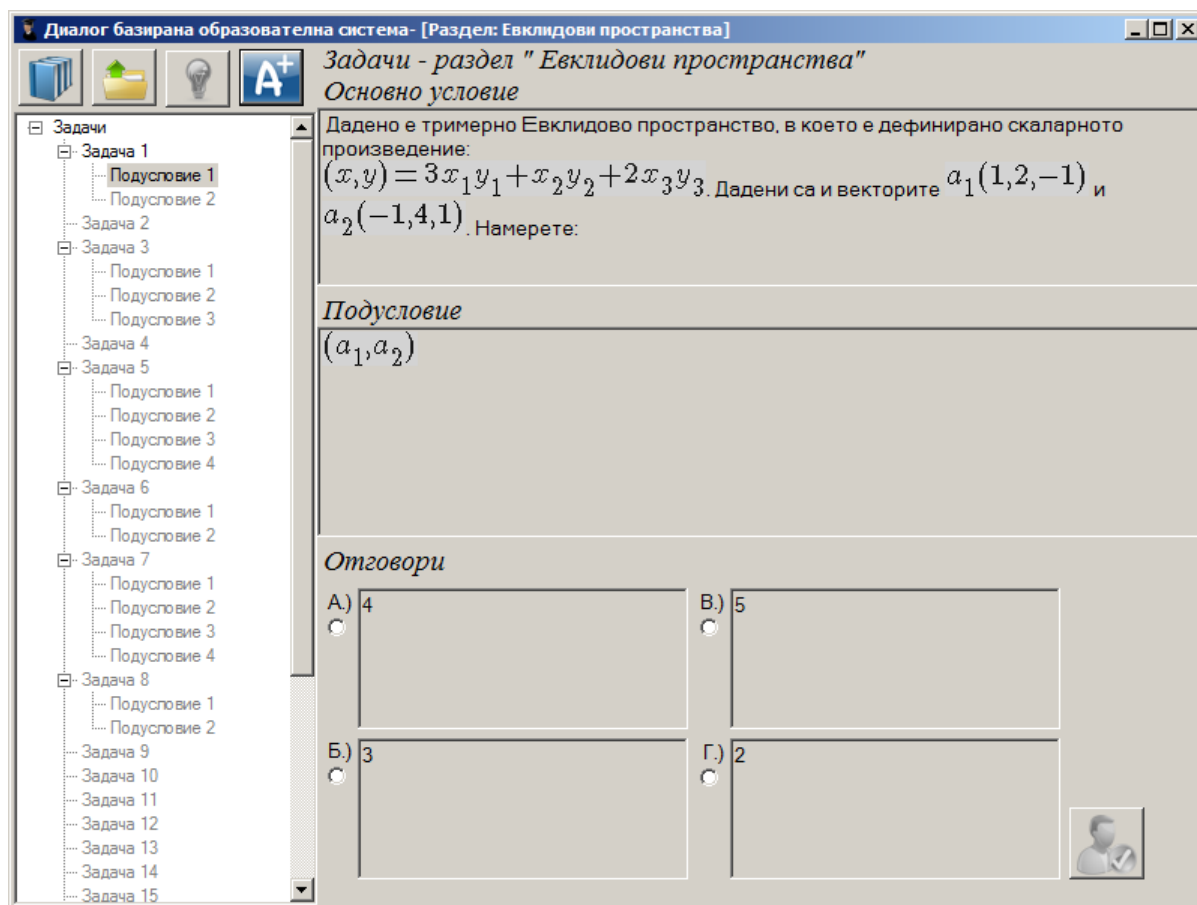
Фигура 17. ДОП за задачи от темата „квадратични форми“ – 2

Осигурена е проверка на въведените данни, като програмата показва къде точно е допусната грешка. Студентите могат във всеки един момент да се придвижват напред/назад в книгата, като програмата няма да загуби текущото състояние на въведена информация. По този начин те могат да правят справка с теоретичния материал и да се връщат обратно към решение на задачата. Задачите се генерират динамично. След

успешно решение на дадена задача е възможно да бъде генерирана нова. Интерфейсът е изцяло на български език.

4.3.3. Софтуер за самоподготовка по темата „Евклидови и унитарни пространства“

Софтуерният продукт от дипломната работа (Стефанов, 2013) е разработен през 2012 г., но самата дипломна работа е рецензирана и защитена пред изпитна комисия с оценка отличен 6 в катедра Компютърни системи на Техническия университет – София, година по-късно – през 2013 година. Това е и причината за разминаването във времето – от една страна, готовият софтуерен продукт е използван в експеримента през 2012 г., а, от друга страна, той е докладван като завършен чрез дипломна работа чак през 2013 година. Авторът на дисертацията е дипломен ръководител. Софтуерната система се състои от две програми – DBES.exe, която се използва от студентите за преглед на теоретична информация и решаване на задачи, и DBES_AdminTool.exe, която се използва от преподавателите за въвеждане на нови уроци и задачи. Продуктът е реализиран с Visual Studio 2010 на езика C#. Използва се .Net Framework 4, което може да се приеме като недостатък, защото би изисквало инсталацията му на потребителския компютър при по-стари версии на Windows (XP или Vista). За визуализиране на математическите символи се използва предварително компилирана библиотека mimeTex, което създава известни проблеми при визуализацията на текста, както може да се види на фигура 18.



Фигура 18. ДОП за задачи от „Евклидови и унитарни пространства“

Реализирана е функционалност за автоматично оценяване, но реализацията на задачите е само във вид на „тест с избираем отговор“, което не може да се отчете като технологична новост. Задачите се съхраняват във формат XML. Добавянето и премахването на нови ресурси става изключително лесно – просто се посочва генерираният от DBES_AdminTool.exe файл.

Въпреки че от технологична гледна точка продуктът не предоставя нищо иновативно, той все пак е уникален от гледна точка на това, че друг, свързан с „Евклидови и унитарни пространства“, не беше открит чрез търсене в Интернет. Както в другите програми, така и тук интерфейсът е изцяло на български език.

4.4. Адаптация на други софтуерни продукти за целите на обучението по Линейна алгебра

Фигура 19. Превод на MatrixCalc на български език

Подбраното технологично средство за въвеждане на математически текст – CodeCogs Equation Editor – и един от софтуерните продукти, който беше приет за подходящ за употреба в електронното обучение по Линейна алгебра – MatrixCalc, – първоначално нямаша превод на български език. След проведена лична кореспонденция с авторите на софтуерните продукти беше извършен въпросният превод. При MatrixCalc дори се

наложи преправяне на част от програмния код на продукта. Няколко основни екрани от преведения продукт са показани на фигура 19.

4.5.Изводи към Глава 4

Подбраните софтуерни компоненти за технологично подпомагане на процеса на самоподготовка по линейна алгебра покриват изискванията на предложения организационен модел:

- Като подходящи средства за подпомагане на самоподготовката на студентите са избрани:
 - Дискусионният форум SimpleMachines – основно средство за комуникация;
 - MathJax – за визуализиране на математически текст в уеб форми;
 - CodeCogs Equation Editor - за въвеждане на LaTeX код в уеб форми;
- Разработени са мултимедийни материали за улеснение на включването на студентите в процеса на електронно обучение;
- Теорията на автоматичното оценяване при диалогово-обучаващите програми е обогатено чрез адаптивна функционалност, насочена към разработчиците на учебно съдържание;
- Разработени са три софтуерни продукта за програмирано обучение, базирани на обновената теория на диалогово-обучаващите програми;
- Подбран е допълнителен софтуер за подпомагане на решаването на задачи по линейна алгебра;
- Всички програмни компоненти са локализирани на български език.

Публикациите с участие на автора, свързани с глава 2, са: (Петров, 2011) и (Петров, и др., 2013).

ГЛАВА 5. ПЛАНИРАНЕ, ПРОВЕЖДАНЕ И АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ ПЕДАГОГИЧЕСКИ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Изследването е проведено на два етапа (две различни учебни години) с общо пет експеримента. Първият етап е изпълнен през учебната 2011/2012 г. с един експеримент от две учебни групи от специалности „Педагогика на обучение по математика и информатика“ (ПОМИ) и „Педагогика на обучение по физика и математика“ (ПОФМ) с учебен предмет „линейна алгебра“. Групата ПОМИ се приема за контролна (ще бъдат проведени семинарни упражнения, без специализирани интерактивни методи и без изискване за предаване на домашни работи чрез дискуссионния форум в Интернет), а тази на ПОФМ е експериментална (в нея е въведен разработеният в дисертационния труд организационен модел за провеждане на семинарни упражнения по линейна алгебра). Преподавател по време на провеждане на експеримента и за двете групи е авторът на дисертационния труд. Този експеримент ще бъде наречен „първи“.

Вторият етап е проведен през учебната 2012/2013 г. и включва по-мощно изследване върху повече групи и под различни форми. За „втори“ експеримент първоначалният план беше да бъде повторен експериментът от предишната учебна година, но с разменени групи – експериментална ПОМИ, и контролна ПОФМ. Поради прекалено малко записани студенти специалностите ПОМИ и ПОФМ бяха обединени в една обща група и това наложи тя да бъде разгледана като една експериментална група с преподавател, водещ упражненията – авторът на дисертационния труд, а за контролна група да бъде приета групата ПОМИ от предишната учебна 2011/2012 година.

„Трети“ експеримент е проведен през учебната 2012/2013 г. със специалност „Информатика“ по учебния предмет „Линейна алгебра и аналитична геометрия“. Учебните групи са три. В първа учебна група се провежда експерименталното обучение с преподавател – авторът на дисертационния труд, а втора и трета учебни групи са контролни – с преподавател гл.ас. Марияна Кацарска.

С първи, втори и трети експерименти се цели да бъде установено дали въведеният организационен модел води до повишаване на мотивацията за учене и като следствие от нея – на успеха на студентите. Допълнително са проведени още два експеримента, при които има само частично въвеждане на организационния модел. При тях не се въвеждат разлики между контролните и експерименталните групи спрямо методите за обучение по време на семинарни упражнения, а разлика има само при процеса на самоподготовка.

„Четвърти“ експеримент е проведен през учебната 2012/2013 г. със специалност „Компютърни системи и технологии“ по учебния предмет „Линейна алгебра и аналитична геометрия“. За експеримента е избрана втора учебна група, а ръководител на упражненията е гл. ас. Марияна Кацарска. В този експеримент не е въведено задължително изискване домашните работи да бъдат предавани в електронен вид, а участието в дискуссионния форум е само пожелателно. Целта на експеримента не е да се сравняват експериментална с контролна група, а да бъде проверено доколко участието в

електронното обучение само по себе си предизвиква интерес у студентите, при положение, че не е задължително.

„Пети“ експеримент е проведен през учебната 2012/2013 г. в Технически колеж към Югозападен университет „Неофит Рилски“ с две специалности (по една учебна група във всяка) по учебния предмет „Линейна алгебра и аналитична геометрия“. За експериментална група е взета специалност „Комуникационна техника и технологии“, а за контролна – „Електроника“. И при двете групи преподавател е гл. ас. Анка Марковска. Предаването на домашните работи в електронен вид е задължително за експерименталната група. С този експеримент се цели да бъде проверено доколко участието в електронното обучение влияе само по себе си на резултатите на студентите.

Резултатите от проведените експерименти са докладвани в (Petrov, et al., 2014).

5.1. Експеримент № 1: ПОМИ (контролна група) и ПОФМ (експериментална група) през учебната 2011/2012 г.

Стартирането на експеримента съвпадна с реформа в календарния график в Югозападен университет „Неофит Рилски“. Според утвърдените на Академичен съвет промени учебната година започна на 1 септември 2011 г., което е с 15 до 30 дни по-рано спрямо повечето университети в страната. Целта на тази реорганизация е да се въведе допълнителна ваканция за студенти и преподаватели през зимния сезон и по този начин да бъдат спестени финансови средства. Един голям позитив на така наложения календарен график е, че обучението не се разпокъсва от коледната ваканция. От друга страна обаче, това би довело до затруднения в провеждането на учебните занятия, най-вече за студентите от първи курс, когато все още тече кампанията по записване в университетите в България.

Опасенията за затруднения в началото на учебния процес се оказаха оправдани. При контролната група (ПОМИ) се забелязва осезаема разлика в присъствията по време на семинарни упражнения в началото на семестъра спрямо по-нататъшната присъственост. По време на първото упражнение присъстват само 2-ма студенти, а във второто – 4-ма. Подобно се оказва положението и при ПОФМ, където на първо упражнение идва само 1 студент, а на второто – 2-ма. Причината за проблемите с посещаемостта през първите две седмици се оказва свързана с промените в календарния график – в началото записаните студенти в двете специалности са прекалено малко, а студенти продължават да бъдат записвани в специалностите след започване на учебните занятия.

Получената ситуация наложи и промяна в хода на експеримента. Практически първите две упражнения се приема, че не са провеждани, а обучението започва от трета седмица. Взето е решение да бъдат компенсирани двете пропуснати упражнения чрез изместване на планираните две контролни работи в извънучебно време, а на тяхно място да се проведат двете пропуснати упражнения.

5.1.1. Сравнение на експерименталната и контролната групи

По списък в експерименталната група са записани общо 14 студенти. Двама от тях прекъсват непосредствено след като са записали семестъра и въобще не взимат участие в учебния процес и съответно те не са взети под внимание за статистиката. Така, от гледна точка на експеримента, групата ПОФМ от 2011 г. се състои от 12 студенти.

Инициали	Пол	СОМД	СОДСО	КР 1	КР 2	УПР	ЛЕК	ДР	Общо точки
А. П.	М	3,00	3,49	0	0	5	0	0	5
А. С.	Ж	3,00	3,73	0	0	3	2	0	5
Б. В.	М	3,25	3,54	3	0	8	7	0	18
Д. Т.	М	3,00	3,29	0	0	8	5	3	16
Е. М.	Ж	4,50	4,87	20	2	9	7	0	38
К. М.	М	3,00	3,65	0	0	1	1	0	2
К. Г.	Ж	4,50	3,86	0	0	9	8	0	17
К. К.	М	4,25	4,02	13	0	3	0	0	16
Н. М.	Ж	5,50	5,25	16	3	11	8	0	38
Н. К.	Ж	4,25	4,53	2	0	6	6	0	14
Р. Г.	Ж	3,00	3,83	0	0	7	5	1	13
С. Г.	М	3,75	3,81	0	0	3	1	0	4

Таблица 5. Резултати на експериментална група ПОФМ 2011/2012 г.

Легенда:

СОМД – Средна оценка по математика от дипломата за средно образование;

СОДСО – Средна оценка от диплома за средно образование по всички предмети;

ОЦЕНКА ЛА – Текуща оценка по линейна алгебра;

КР 1 – Точки от контролна работа №1;

КР 2 – Точки от контролна работа №2;

УПР – Точки от присъствие на упражнения;

ЛЕК – Точки от присъствие на лекции;

ДР – Точки от предадени и защитени домашни работи;

* – Студентите не събират необходимия брой за оценка „среден 3“, но са близко до него.

В контролната група има общо записани 31 студенти. От тях 9 няма да бъдат взети под внимание за статистиката поради това, че не са взели реално участие в учебния процес по линейна алгебра – повечето от тях са напуснали, а някои формално не са заявили прекъсване на обучението си, но не са имали никакво участие в учебния предмет (такива двама студенти присъстват само в официалните списъци). Така контролната група ПОМИ от 2011 г. реално се състои от 22 студенти. Двама от тях са записани в средата на семестъра и съответно са с редуциран норматив – те ще бъдат разгледани, но няма да участват с резултатите си при прилагане на статистически методи, понеже не са в напълно равнопоставено положение с останалите студенти.

Средният успех по математика от дипломите за средно образование при експерименталната група е 3,75 (стандартно отклонение 0,80), а при контролната група е 3,43 (стандартно отклонение 0,42). Прилагането на U-тест на Ман-Уитни (Въндев,

2003) при $\alpha=0,05$ потвърждава нулевата хипотеза с $U=99,5$, което е еднозначно по-голямо от критичната стойност $U_{crit}=69$. Това означава, че медианите могат да се приемат за статистически равни.

Средният успех от дипломите за завършено средно образование при експерименталната група е 3,99 (стандартно отклонение 0,57), а при контролната група е 4,01 (стандартно отклонение 0,37). U-тест на Ман-Уитни при $\alpha=0,05$ дава стойности $U=114$ при $U_{crit}=69$, което отново приема нулевата хипотеза и ще се счита, че медианите са статистически равни.

Инициали	Пол	СОМД	СОДСО	КР1	КР2	УПР	ЛЕК	ДР	Общо
А. П.	М	3,00	3,40	0	0	5	2	0	7
А. Ш.	М	3,00	3,30	0	0	2	4	0	6
А. Б.	М	4,00	4,43	0	0	11	7	1	19
А. То.	М	3,00	3,70	0	0	10	7	0	17
А. Ту.	М	3,50	4,02	0	0	2	4	0	6
В. А.	Ж	4,00	4,02	0	0	3	4	0	7
В. И.	Ж	4,00	4,13	0	0	5	5	0	10
Д. К.	М	3,25	3,84	0	0	7	5	0	12
К. А.	М	3,00	3,78	0	0	3	2	0	5
К. Ф.	М	3,50	4,41	0	0	8	7	0	15
К. Г.	М	4,25	4,38	0	0	12	7	9	28
М. С.	М	4,18	4,28	12	0	10	4	9	35
Н. Г.(50%)	М	3,00	4,05	0	0	6	8	0	14
Н. К.	М	3,25	3,85	0	0	5	5	0	10
Р. А.	М	3,50	4,25	0	0	8	7	0	15
С. Б.	Ж	3,25	4,07	0	0	5	4	0	9
С. Ч.	Ж	3,38	4,58	0	0	6	5	0	11
С. Са.	Ж	3,25	4,21	13	3	12	8	3	39
С. Сп.(50%)	Ж	3,25	4,33	0	0	8	8	0	16
С. Л.	М	3,00	3,26	0	0	4	2	0	6
Х. С.	М	3,00	3,40	0	0	8	5	0	13
Я. П.	М	3,00	3,30	0	0	8	7	0	15

Таблица 6. Резултати на контролна група ПОМИ 2011/2012 г.

Легенда:

50% – Студентът се е записал в средата на семестъра и има редуциран норматив.

На базата на получените статистически резултати се приема, че контролната и експерименталната групи са подбрани коректно и няма статистически значима разлика при тяхното входно ниво. В базата от данни присъстват и други балообразуващи фактори, но те са по същество различни (например матура по математика е коректно да бъде сравнявана с конкурсен изпит по физика), поради което те няма да бъдат взети под внимание. Подробно данните за успеха на студентите са представени в таблица 5 и таблица 6.

5.1.2. Общи бележки относно проведения експеримент

И в контролната, и в експерименталната групи се наблюдава общо ниско ниво на предварителна подготовка по математика. Оценките им от дипломата за средно образование не са добри, включително и оценките им по математика. Това може да се счете за нещо нормално, понеже педагогическите специалности в България през последните години не могат да се похвалят с особена популярност и специалностите ПОМИ и ПОФМ не правят изключение. Конкретно за учебната 2011/2012 г. приемът в тези специалности за много студенти е „по документи“, т.е. въобще без конкурсен изпит.

В контролната група на специалност ПОМИ средната посещаемост на семинарни упражнения е 6,70 упражнения на студент (стандартно отклонение 3,12), а при експерименталната група ПОФМ има средно 6,08 посещения на студент (стандартно отклонение 2,97). Това естествено показва наличието на системни отсъствия на голяма част от групите.

Според неформални разговори с преподавателите, водили курса в предишни години, практиката за тези две специалности показва, че по принцип мотивацията на студентите за участие в учебния процес (сравнена с други по-популярни специалности) е по-ниска. Това мнение се потвърждава от автора на дисертационния труд след провеждане на експеримента. Налице имаше известна апатичност на студентите към изпълнението на учебните им задължения, която бе подкрепена и от системно отсъствие от семинарни упражнения на голяма част от тях.

Апатичността към изпълняване на учебните задължения се прояви най-силно при процеса на самоподготовка. В контролната група отначало бяха предавани сравнително много домашни работи на хартия, но почти никой от студентите не успя да защити предаденото. Наложената практика беше преподавателят да задава допълнителни кратки въпроси, свързани с предадените решения. На защитите на първата домашна работа (където голяма част от студентите се опитаха да защитят предадени решения) само четирима студенти получиха точки (при това не пълни, понеже в решенията са открити груби грешки). Във втората домашна работа само двама студенти предадоха решения (но отново с множество грешки), а в третата – нито един. Четиримата студенти предали и защитили домашни работи получиха съответно 9, 9, 3 и 1 точки (от общо 39 възможни за целия курс), което естествено е изключително незадоволителен резултат. Причината за масовия отказ от предаване на домашни работи вероятно се дължи на това, че студентите видяха, че домашни работи не просто се предават, но и се защитават.

Положението с експерименталната група, където домашни работи се задават всяка седмица и се предават само и единствено в електронен вид, не се различава съществено. От всички 12 студента само 2-ма предадоха решения на домашни работи и получиха точки, а още 4-ма опитаха да предадат решения, но не успяха да ги защитят или те бяха напълно грешни. При това въпросните двама студенти получиха съответно 3 и 1 точки от общо 39, което отново е крайно незадоволителен резултат. Всъщност от всички 12 студенти в групата едва половината (6) въобще се регистрираха в дискусияния форум, при това далеч не в самото начало на обучението. Този факт впоследствие наложи да

бъде прието, че експериментът е неуспешен, а за следващите експерименти – да се предвиди реорганизация в организационния модел на експерименталната група.

Относно самите семинарни упражнения, мотивацията на студентите също беше видимо много ниска. В контролната група студентите не задаваха въпроси дори когато видимо не разбират преподавания материал. С изключение на двама студенти всички в контролната група изпитваха затруднения при извършването на елементарни математически операции. Това сериозно затрудняваше учебния процес. Практически може да се приеме, че от темата за формули на Крамер нататък мнозинството от студентите престанаха да участват активно в учебния процес, вероятно защото учебният материал им стана прекалено сложен. Това наблюдение се потвърждава и от резултатите на контролна работа № 2, където дори двамата по-изявени студенти не успяха да решат нито една от поставените задачи.

В експерименталната група положението с провеждането на семинарните упражнения беше малко по-различно, но крайните резултати не се отличават значително. Прилагането на интерактивни методи на обучение видимо засилва мотивацията при някои студенти и те участваха в семинарните упражнения с повишен интерес. За съжаление системното неизпълнение на учебните задължения, свързани с процеса на самоподготовка, значително навреди на плановете за прилагане на разработените интерактивни методи по време на семинарни упражнения. Практически се оказва невъзможно студентите да бъдат оставени да решат задачи самостоятелно или в група без преподавателят да участва като водеща фигура при решенията – в почти всички случаи студентите не се справяха, като очевидната причина беше, че са забравили ключови знания, които са предавани в предишни учебни часове. Така се налагаше преподавателят да ги припомня, а с това очаквано се губеше ценно учебно време. Поради тази причина в процеса на работа се наложи интерактивните методи за обучение да бъдат сериозно съкратени и фокусът да бъде поставен главно върху два метода: дискутиране на решения на задачи и регулярно поставяне на кратки въпроси от страна на преподавателя към цялата група или индивидуално към конкретен студент. Така – на практика, трябва да се отбележи, че експериментът не беше проведен по първоначален план. Обобщените резултати от текущия контрол по линейна алгебра на експерименталната група са показани в таблица 5. Обобщените резултати за контролната група са показани на таблица 6.

Въпреки, че казаното дотук е очевиден неуспех за експеримента, все пак може да се забележи и една положителна тенденция. Тя е, че с прилагането на интерактивни методи (макар и частично, а не в пълнотата, в която бяха предвидени) се постига известно активизиране на част от студентите:

- Започват да задават въпроси по своя собствена инициатива, когато нещо не им е ясно;
- Търсят преподавателя за консултации преди контролните работи (няма регистриран подобен случай в контролната група);

- Въпреки че не влияе на крайните оценки, има минимално повишение на средния брой точки за студент (от статистиката са изключени двамата студенти с редуциран на 50% норматив, защото те не са имали равнопоставена с останалите възможност да натрупат точки от домашни работи):
 - 15,50 т. за експерименталната и 14,25 т. за контролната група, ако се вземат под внимание всички записани студенти. Съответните стандартни отклонения са 11,42 и 9,33;
 - 16,73 т. за експерименталната и 15,16 т. за контролната група, ако се изключат студентите, които имат под три присъствия на семинарни упражнения (такива студенти може да се приеме, че практически не са участвали в учебния процес). Съответните стандартни отклонения са 11,14 и 9,39;
 - 22,00 т. за експерименталната и 19,91 т. за контролната група, ако се изключат студентите, които имат под 6 присъствия на семинарни упражнения (приема се, че това са студенти, които са участвали в под 50% от упражненията). Съответните стандартни отклонения са 10,24 и 9,19.

Разбира се отчетената разлика в средния брой точки не може да бъде приета еднозначно като положителен резултат, следствие от експеримента, понеже има още един съществен фактор, който трябва да бъде отчетен – експерименталната група по стечение на обстоятелствата е с наполовина по-малко студенти спрямо контролната. В (Leithwood, et al. 2004) например се разисква въпросът, че по-малките учебни групи спомагат за по-лесно адаптиране на учениците към нова учебна среда. Освен това трябва да се отбележи, че процентното участие на студенти от женски пол в експерименталната група е значително по-голямо от това при контролната група. Така че отчетеното повишение на средния брой точки не може да бъде прието като резултат от въведените интерактивни методи на обучение. U-тестът на Ман-Уитни е категоричен, че няма статистическа разлика между медианите ($U=116$ при $U_{crit}=69$ при разглеждане на целите учебни групи без студентите с редуцирано натоварване).

5.1.3. Характеристика на някои от по-изявените студенти

Изявените студенти са ядрото на всяка учебна група и те са тези, които евентуално могат да влияят на общото поведение на всички в нея. Те са хората, към които най-често по-слабите студенти се обръщат за помощ – за написване на домашна работа или за помощ преди изпит. Поради тази причина е считано за полезно в изследването да бъде обърнато внимание на общите психологически черти на същите.

От експерименталната група могат да бъдат отличени четирима студенти: Е. М., К. Г., Н. М. и Н. К. Прави впечатление, че и четирима са от женски пол. Мъжете в групата бяха значително по-пасивни, дори може да се каже „отсъстващи“ от учебния процес.

Според класификацията на Юнг Е. М. се представи като типичен екстровеит. Приемаше ролята на „лидер на групата“ и с лекота участваше във всички дискусии. Не се притесняваше да изразява мнението си искрено и без задръжки. Може също така да бъде определена като „сетивен“ тип – демонстративно показва нежелание да бъдат

предавани по-абстрактни знания, изисква изрично излагане на алгоритъм за решаване на типови задачи и често иска демонстрация с „прости примери“. По класификацията на Фелдър-Силверман Е. М. би следвало да бъде определена по-скоро като визуален тип, защото много трудно се ориентира от дефиниции и формулировки на теореми, а при показване на примери с числа, по нейно твърдение, „всичко е ясно“. Определено може да се твърди, че Е. М. притежава амбиция за самореализация. Пример за това е изкараният най-висок резултат на контролна работа № 1.

К. Г. е особен случай в експерименталната учебна група. От една страна тя може да бъде определена като един от активните студенти, защото присъства на повече упражнения от средното ниво за групата и не се притеснява да изказва лично мнение по време на дискусиите. От друга страна нейното поведение може да бъде определено като „деструктивно“ за мотивацията в групата, защото участието ѝ обикновено се свежда до синтезиране на заключения като „това пък кога ще ни трябва“, „не ни давайте такива задачи на изпита, защото са трудни“, „хайде стига сме решавали задачи за днес“ и др. подобни подмятания, както и до правене на системни опити за отклоняване на темата на занятията с въпроси извън учебния процес. Друга интересна черта е, че непрекъснатото допускане от нейна страна на грешки в най-елементарни математически операции като събиране, изваждане, умножение и деление въобще не я притеснява, тя даже демонстративно се опитва да изтъкне грешките си като някакъв неразбираем позитив.

Н. К. е по-скоро амбиверт. Проявява известна пасивност, но с повече настоятелност от страна на преподавателя взема отношение по поставените проблеми. Може да се каже, че в първите няколко упражнения Н. К. беше една от най-примерните студентки по време на упражнения не само в експерименталната група, но и изобщо. Неизпълнението на учебните задължения в частта на самоподготовката обаче видимо оказва силно въздействие върху нейното развитие. След ясно изразения провал на контролна работа № 1 Н. К. спря да посещава семинарни упражнения и лекции по този учебен предмет. Вероятна причина за това може да бъде някакво вътрешно разочарование.

Н. М. е с най-редовно присъствия в експерименталната група. Стеснителна е и трудно поема инициатива сама. Когато не разбира нещо, не задава въпроси. Откроява се от другите студенти с по-рядко допускане на грешки в изчисленията при решаване на задачи. Направи няколко опита за включване в процеса на самоподготовка, но беше очевидна липсата на стимул за самостоятелна работа. Преподавателят е на мнение, че с по-засилена индивидуална подкрепа и присъствие в по-мотивирана учебна група, Н. М. щеше да навакса пропуските от знанията си и да постигне добри резултати по учебния предмет.

От контролната група могат да бъдат отличени студентите К. Г., М. С. и С. Са., както и С.Сп. Трябва да се отбележи и обстоятелството, че групата като численост е значително по-голяма от експерименталната, но повечето от студентите присъстват на семинарни упражнения прекалено малко.

В отношенията си към колегите си К. Г. е по-скоро ориентиран към екстраверт, но по време на семинарните упражнения проявява силна сдържаност и избягва да поема

каквато и да е инициатива, например като задаване на въпроси към преподавателя. Присъства практически на всички семинарни упражнения, но изпитва сериозни трудности в усвояването на изучавания материал. Все пак успява да предаде и защити три домашни задания от първата част на учебното съдържание, което всъщност е и максимума за групата. Явява се на всички контролни работи, но не успява да изкара нито една точка.

За М. С. може да се твърди, че е студентът с най-добра предварителна подготовка по математика от всички в групата (оценката му от дипломата от средно образование също е една от първите в групата). Проявява известен интерес към учебния предмет и в началото се включва активно. Той също предава три домашни работи в началото на курса, но постепенно загубва мотивация за самоподготовка. На първата контролна работа е един от двамата в цялата група, които въобще получават точки, но голямото количество грешки в изчисленията го спира от получаването на отличен резултат. Във втората част от курса продължава да участва значително по-активно от останалите си колеги, но все пак и неговата мотивация видимо спада. Именно тогава той прави и две последователни отсъствия. Нулевият резултат на контролна работа № 2 потвърждава предположението на преподавателя, че М. С. е „изгубил нишката“ и вече не следи развитието на учебния материал достатъчно внимателно.

С. Са. е вторият студент от контролната група, който успява да преодолее границата „среден 3“ за текущо оценяване. Тя е изключително затворена в себе си и много необщителна. Според преподавателя това е и причината тя да спре да предава домашни работи след първата, въпреки че я защитава успешно. Вероятно нуждата от отговаряне на въпроси относно написаното я плаши. С. Са. също така е и вторият студент, който има най-много присъствия на семинарни упражнения. Освен това тя е единствената от контролната група, която успява да изкара няколко точки на контролна работа № 2.

С. Сп. е с редуциран норматив от 50%. Тя започва да посещава учебните занятия в средата на семестъра, непосредствено след провеждането на контролна работа № 1. Пропуснатите знания от началото на предмета естествено оказват силно влияние и тя закономерно не успява да изкара добър резултат. Редно е да се отбележи обаче, че тя положи изключителни (сравнено с нейните колеги) усилия, за да се включи в учебния процес. Още в първите седмици се постарала да се запознае донякъде със съдържанието на пропуснатите упражнения (идваше редовно на консултации с преподавателя). В учебните часове бе една от малкото, които задаваше въпроси. Като цяло може да се каже, че С. Сп. беше най-силно мотивираният студент от контролната група, но липсата на време, както и на добра предварителна подготовка по математика, я лишиха от възможността да постигне добър резултат.

5.1.4. Изводи от експеримент №1

На базата на проведения експеримент могат да се направят следните изводи:

- Работната хипотеза нито се потвърждава, нито се отхвърля. Причината е, че в експеримента не беше възможно да бъдат въведени по-голямата част от

предвидените в организационния модел нововъведения. По този начин не може да се твърди, че въпросният организационен модел въобще е бил приложен;

- Не може да се твърди и дали въведената електронна система затруднява или улеснява процеса на самоподготовка на студентите, защото студентите от експерименталната група почти не участваха в нея;
- В експерименталната група се отчитат минимални положителни резултати от гледна точка на мотивацията за участие в учебния процес по време на семинарни упражнения. Това донякъде подкрепя хипотезата на много автори, че интерактивните методи за обучение довеждат до по-висока мотивация за учене при студентите, въпреки че в случая такива методи бяха въведени само частично. Все пак това наблюдение в текущия експеримент е по-скоро субективно и също не би могло да се приеме за категоричен извод;
- Студентите от специалности ПОМИ и ПОФМ като цяло са с много слаба подготовка по математика от училище;
- Голяма част от студентите системно отсъстват не само от семинарни упражнения, но и от лекции, което силно затруднява провеждането на адекватно обучение;
- Като цяло мотивацията за участие в учебния процес е много слаба и отсъствията имат системен характер. Оказва се, че дори малко отсъствия от семинарни упражнения водят до невъзможност за изучаване на последващ учебен материал.

Въз основа на тези резултати се прави заключение, че експеримент № 1 е неуспешен. При провеждането на следващи експерименти е нужно да бъде направена реорганизация на модела, с която да се повиши участието на студентите в процеса на самоподготовка.

5.2. Експеримент №2: ПОМИ 2011/2012 (контролна група) и ПОМИ+ПОФМ 2012/2013 (експериментална група, сборна от две специалности)

На базата на резултатите от експеримент №1 за експеримент №2 се налага реорганизация на модела, с която да се повиши мотивацията на студентите за участие в процеса на самоподготовка. За съжаление през учебната 2012/2013г. нямаше възможност за провеждане на експеримент с нови контролна и експериментална групи – поради малък брой записани студенти специалностите ПОМИ и ПОФМ бяха обединени в една учебна група. По тази причина беше взето решение сборната група отново да бъде експериментална, а за контролни резултати да бъдат взети данните на контролната група ПОМИ от 2011/2012 г. (от предишния експеримент №1). Тези обстоятелства силно затрудняват правенето на сериозна реорганизация на модела, защото приемането на допълнителни мерки спрямо експерименталната група (например въвеждане на по-рестриктивен режим за предаване на домашни работи, промяна в точковата система и т.н.) няма как да бъдат приложени върху контролната група и това би довело до невалиден експеримент. Така се наложи да бъде приет по същество същият режим на работа с експерименталната група, както този от предишната учебна година, а евентуални промени можеха да бъдат направени само и единствено в рамките на принципно различните спрямо контролната група елементи – това са електронните

компоненти за програмно осигуряване на процеса на самоподготовка и самите интерактивни методи за обучение по време на семинарните упражнения.

Предприетият подход за реорганизация беше чрез интерактивните методи за обучение по време на семинарни упражнения да се възбуди допълнителен интерес у студентите към взимане на участие в дискусияния форум и към използване на софтуерните продукти. Беше възприета коренна промяна във визията и отношението към самата електронна среда – участието в нея вече не беше представяно като задължение за предаване на домашни работи, а позитивно – като възможен помощник за решение на домашни работи. Именно този подход – преминаването от негативна нагласа на база рестрикции към позитивно отношение на основата на нови възможности – бе възприета от преподавателя, провеждащ експеримента. Главният фокус беше тази промяна да постигне успешен резултат още във въвеждащите упражнения. Например, след решаване на задача, в която има множество изчисления, преподавателят казва на студентите:

- А знаете ли, че има много компютърни програми, които с лекота извършват тези дребни сметки, а вие се занимавате само и единствено с оформянето на данните? По-късно днес ще ви кача една такава програма на уеб-сайта. Имайте предвид, че аз нямам нищо против да използвате такива програми, за да си помогнете в писането на домашните работи!

Както ще бъде показано от резултатите, този подход в отношението към студентите постигна много голям успех.

5.2.1. Сравнение на експерименталната и контролната групи

Експериментът през учебната 2012/2013 г. беше белязан от същите организационни проблеми, както и този от предходната. Записванията на студентите продължаваха и след започване на учебната година, а посещаемостта на първите две семинарни упражнения беше толкова ниска, че може да се приеме, че те практически не са се провели (преподавателят се запозна с няколко студенти и се дискутираха организационни въпроси, свързани главно с оценяване и начин на работа). Така отново се наложи да бъде извършена реорганизация и контролни работи № 1 и № 2 да бъдат изместени в отделни допълнителни часове, а на тяхно място да бъдат проведени семинарни упражнения.

Друг потенциален проблем беше прекалено голямата учебна група – по официален списък имаше общо 38 записани студенти от двете специалности. В действителност 6 от записаните студенти напуснаха без въобще да вземат участие в учебния процес, а други 7 студенти се отписаха към средата на семестъра. За тези 13 студенти е счетено, че не трябва да се вземат под внимание за статистиката. Други 3 студента също напуснаха висшето учебно заведение, но след края на учебния семестър, т.е. те са преминали целия процес на текущото оценяване по линейна алгебра и за тях е счетено, че ще бъдат оставени в статистическите данни на експеримента (трябва да се отбележи, че при двама от тези студенти имаше налице системни отсъствия и съответно много ниски резултати

на текущ контрол). Така реалният брой на студентите в групата е 25. Това е незначително повече спрямо контролната група, където студентите бяха 22.

Средният успех по математика от дипломите за средно образование при експерименталната група е 3,85 (стандартно отклонение 0,76), а при контролната група е 3,43 (стандартно отклонение 0,42). Прилагането на U-тест на Ман-Уитни при $\alpha=0,05$ дава стойности $U=183$ при критичната стойност $U_{crit}=182$, което приема нулевата хипотеза и съответно се приема, че медианите са статистически равни (все пак близки до критичната стойност).

Средният успех от дипломата за завършено средно образование при експерименталната група е 4,21 (стандартно отклонение 0,51), а при контролната група е 4,01 (стандартно отклонение 0,37). U-тест на Ман-Уитни при $\alpha=0,05$ дава стойности $U=213$ при $U_{crit}=182$, което отново приема нулевата хипотеза и – съответно на това, се приема, че медианите са статистически равни.

Данни за оценките от дипломата за средно образование на всеки студент от експерименталната група са представени в таблица 8, а за контролната група – в таблица 6.

5.2.2. Общи бележки относно проведения експеримент

Реорганизацията спрямо експеримент № 1 явно се оказва много важна от практическа гледна точка. Ако в експеримент № 1 в дискусияния форум се бяха регистрирали 6 от общо 12 студенти (50%), в експеримент № 2 се регистрираха 19 от общо 25 студенти (76%). С това може да се каже, че промяната на организационния модел постигна целта си. Предположението за този факт е, че студентите масово са изпитвали страх от това, че преподавателят ще разбере, че не са решавали задачите напълно самостоятелно, а са използвали помощ (например от компютър, както е в модела) и това би било прието от преподавателя като нещо лошо. Когато преподавателят насърчаваше студентите да използват компютърните програми, за да си помагат в решението на задачите, студентите често задаваха въпроса „Наистина ли е позволено?“ и подхождаха със силно недоверие. Впоследствие в дискусияния форум преподавателят получи няколко лични съобщения, които в общи линии могат да се приемат като „извинение“ от страна на студентите, че са си помагали с компютърната програма при решаването на задачите. Този психологически ефект евентуално би могло да се приеме, че е наследство от традициите и използваните схеми в средното образование и би било хубаво да бъде изследван допълнително в други научни изследвания.

За съжаление, трябва да се отбележи, че този ентузиазъм за работа беше проявен с известно закъснение. Въпреки че извадката от предишната експериментална група е прекалено малка, може да се наблюдава съответствие между двата експеримента – има тенденция студентите да активизират участието си във форума чак през месец октомври (когато приближава контролна работа №1), а някои се регистрират дори чак през декември (когато реално започнат да се оформят оценките от текущ контрол). Данните за датите на регистрация за първи и втори експерименти са показани в таблица 7. Това естествено

би следвало да притъпи очаквания краен ефект от експеримента, защото по проект самоподготовката е обвързана с всяко следващо упражнение, а реално се оказва, че студентите традиционно изчакват най-крайния възможен срок за предаване на домашните си работи (всъщност в редица случаи го правят дори след като крайният срок е преминал).

Посещаемостта на семинарни упражнения, както и през предишната година, не е висока. Средно студентите в експерименталната група са присъствали на по 6,88 упражнения (стандартно отклонение 3,31). Статистиката с присъствията е сходна с тази от контролната група (6,70 упражнения на студент при стандартно отклонение 3,12). Прави впечатление обаче, че има 6-има студенти, които имат 11 или повече присъствия на упражнения, което е два пъти повече спрямо общото за двете учебни групи от 2011/2012 г. (там имаше едва 3-ма такива студенти).

Инициали	Учебна група	Регистрация във форума
Н. М.	ПОФМ 2011/2012	2011-09-16
Б. В.	ПОФМ 2011/2012	2011-09-21
К. М.	ПОФМ 2011/2012	2011-09-27
Р. Г.	ПОФМ 2011/2012	2011-10-30
Е. М.	ПОФМ 2011/2012	2011-11-01
К. Г.	ПОФМ 2011/2012	2011-12-06
В. З.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-09-19
Л. Д.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-09-21
Б. Т.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-09-25
И. Б.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-06
М. Г.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-08
Ф. Б.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-08
Л. Т.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-10
Г. Н.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-11
Е. Г.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-11
Д. И.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-13
Си. Ко.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-13
А. Б.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-14
Г. Т.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-15
А. С.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-19
Р. Я.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-10-24
Д. В.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-11-10
М. Ба.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-11-14
А. М.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-12-04
М. Н.	ПОМИ/ПОФМ 2012/2013	2012-12-10

Таблица 7. Дати на регистрация на потребители от експерименти № 1 и № 2

Ако бъде разгледана учебната група като цяло, отново е налице апатичност към учебния процес и неизпълнение на учебните задължения. Голяма част от студентите – 13 на брой, въобще не успяват да предадат и защитят нито една домашна работа. От останалите 12 студенти обаче половината са изкарали повече от 20 точки – сиреч половината възможни. Общият брой точки от домашни работи, събран от цялата група

ПОМИ/ПОФМ през 2012/2013 г., е 240 точки (от 1000 възможни), което, сравнено с 22 точки (от 880 възможни) от контролната група през предишната учебна година, показва категорично повишение. Крайните резултати от текущия контрол са представени в таблица 8.

Инициали	Пол	СОМД	СОДСО	КР 1	КР 2	УПР	ЛЕК	ДР	Общо точки
А. Б.	Ж	3,00	4,16	0	0	6	1	0	7
А. М.	Ж	3,00	3,67	0	0	3	2	0	5
А. С.	М	4,00	3,79	0	0	12	5	9	26
Б. Т.	Ж	3,25	3,88	1	0	7	7	0	15
В. З.	Ж	3,00	4,11	12	15	13	8	36	84
Г. Т.	М	3,00	3,55	0	0	5	2	12	19
Г. Н.	Ж	3,50	4,40	4	0	11	6	24	45
Д. В.	М	4,33	5,00	0	0	5	5	0	10
Д. И.	М	4,00	3,99	0	0	12	5	30	47
Е. Г.	Ж	4,75	5,03	12	0	8	6	15	41
И. Б.	Ж	4,00	4,65	1	0	8	7	0	16
Й. С.	Ж	3,75	4,14	0	0	5	3	0	8
К. Б.	М	3,25	3,90	0	0	3	3	0	6
Л. Т.	Ж	3,39	4,06	0	0	5	8	21	34
Л. Д.	Ж	4,00	4,50	0	0	6	1	12	19
М. Ба.	Ж	4,21	4,95	0	0	4	2	9	15
М. М.	М	3,33	3,20	0	0	2	1	0	3
М. Н.	М	3,25	3,88	0	0	4	0	0	4
М. Г.	М	4,00	3,87	0	0	9	6	3	18
Р. Я.	Ж	6,00	5,20	17	17	13	8	39	94
Си. Ки.	Ж	5,33	4,27	0	0	3	3	0	6
Си. Ко.	Ж	4,67	5,01	15	17	11	8	30	81
Ст. Ко.	Ж	3,50	4,17	1	0	5	5	0	11
Ф. Б.	М	3,75	3,71	0	0	6	5	0	11
Х. Д.	Ж	3,00	4,20	0	0	6	3	0	9

Таблица 8. Резултати на експериментална група ПОМИ/ПОФМ 2012/2013 г.

Във връзка с представените резултати трябва да се отбележи, че Д.И. и Л.Т. въобще не се явяват на контролни работа №1 и №2. Това обяснява явното несъответствие между много получени точки на домашни работи и много нисък краен резултат.

Съпоставката за среден брой точки на студент между експерименталната и контролната група показва голяма разлика:

- 25,36 т. за експерименталната и 14,25 т. за контролната група, ако се вземат под внимание всички записани студенти. Съответните стандартни отклонения са 25,72 и 9,33;
- 26,21 т. за експерименталната и 15,16 т. за контролната група, ако се изключат студентите, които имат под три присъствия на семинарни упражнения. Съответните стандартни отклонения са 25,90 и 9,39;

- 36,64 т. за експерименталната и 19,91 т. за контролната група, ако се изключат студентите, които имат под 6 присъствия на семинарни упражнения. Съответните стандартни отклонения са 28,86 и 9,19.

Моментално прави впечатление огромната разлика в стандартното отклонение между експерименталната и контролната групи. Освен това, при премахване на слабо заинтересованите студенти от групите, разликата между контролната и експерименталната групи нараства. Това еднозначно показва, че статистическата разлика в средния брой точки се получава главно заради сравнително малкия брой студенти от експерименталната група, които работят мотивирано и активно. Тоест, може да се приеме, че експерименталният организационен модел е повлиял само на малка част от студентите, докато при по-голямата част от тях не се наблюдава значима промяна.

Горният извод се потвърждава и при прилагане на U-теста на Ман-Уитни. При $\alpha=0,05$ към данните за общия брой точки на всички студенти се приема нулевата хипотеза, т.е. медианата на експерименталната група се приема за равна на медианата на контролната група. Получената стойност $U=204$ е по-голяма от критичната $U_{crit}=182$. При премахване на студентите с под 2 присъствия на семинарни упражнения се получава $U=178$ при $U_{crit}=138$, а при премахване на студентите с под 6 присъствия на семинарни упражнения се получава $U=54,5$ при $U_{crit}=40$, т.е. и при редуцирани групи отново се потвърждава нулевата хипотеза, че медианите са статистически равни. Тези данни показват, че според U-метода на Ман-Уитни няма разлика между контролната и експерименталната групи и се отхвърля хипотезата, че експерименталният модел е повлиял на групата като цяло. Тук може да се потвърди само новоформираната хипотеза: организационният модел е повлиял само на малка част от студентите в експерименталната група, но не и на групата като цяло.

Друго наблюдение е свързано с посещаемостта на лекции. Въпреки по-добрите средни резултати, точките от посещения на лекции за експерименталната група са общо 110, а за контролната група са повече – общо 117 точки (при по-малко студенти в групата). Тези данни са в подкрепа на хипотезата, че получените разлики са в резултат от въведения организационен модел при семинарните упражнения.

Отново от разгледаните данни се вижда ясно, че неизпълнението на учебните задължения и най-вече неучастието в семинарни упражнения и лекции са основна причина за ниските резултати на по-голямата част от студентите.

5.2.3. Характеристика на някои от по-изявените студенти

Както е видно от резултатите в таблица 8, в експерименталната група рязко по успех и по активност се открояват трима студенти – Р. Я., Си. Ко. и В. З. Въпреки слабите общи резултати, редно е да се вземат под внимание и Г. Н., Д. И. и Л. Т., поради по-засилената им активност в процеса на самоподготовка.

Р. Я. е безспорно най-амбицираната за учене студентка в групата. Въпреки че не спазваше стриктно препоръките за предаване на домашните работи в рамките на

учебната седмица, в която те са зададени, тя винаги се стараяше да е добре подготвена и следеше развитието на учебния материал. По време на упражнения се проявяваше по-скоро като амбиверт – не обичаше да се изявява и да взима участие, но на моменти открито проявяваше нетърпимост към хора, които умишлено се опитват да пречат на учебния процес. Не се притесняваше да пита преподавателя, когато нещо не е съвсем ясно. По време на самостоятелната подготовка не се притесняваше да се свързва с преподавателя и да потърси помощ, но почти винаги чрез лични съобщения, а не публично във форума. Според класификацията на Фелдър-Силвърман Р. Я. е по-скоро визуален тип, защото много лесно се ориентира при показване на конкретни числени примери при задачите, докато ориентирането ѝ при по-абстрактни формулировки е значително по-трудно.

Си. Ко. също приложи забележимо старание при предаване на домашните работи. Решенията ѝ бяха въвеждени директно с редактора на форума, при това с много подробни детайли. По време на семинарните упражнения се прояви по-скоро като лек интроверт. Отговаряше на зададени към нея въпроси прекалено плахо. За сметка на това беше много усърдна във воденето на подробни записки. При решаването на задачи имаше тенденция да запамятава готови „алгоритми за решение“ на типови задачи, но понякога си личеше, че не разбира в детайли какъв е смисълът на извършваните операции. Доколкото е възможно, преподавателят положи усилие да помага допълнително на Си. Ко., когато се забележеше подобен проблем.

За В. З. в общи линии може да се каже същото, както при Си. Ко. Студентката положи големи усилия, особено във втората част на курса – след втората контролна работа (това обяснява и нетипично по-високия ѝ резултат на контролна работа № 2 спрямо контролна работа № 1). В дискусияния форум В. З. не се притесняваше да дава частични решения на задачите и да търси активно допълнителна помощ от преподавателя. Тя е и най-активният участник в дискусияния форум – има 42 мнения в 12 теми. На фона на изключително ниската ѝ оценка по математика от дипломата за средно образование – среден 3, това показва, че студентката е работила много активно за наваксване на пропуските си.

Г. Н. може да бъде характеризирана като лек екстревърт. Студентката имаше силен старт като много активен участник в семинарните упражнения, но впоследствие активността ѝ намаля значително. Този рязък спад беше видим и при самостоятелната подготовка – тя предаде всички домашни работи от първата част на курса и ги защити успешно, но от темата за линейни пространства нататък участието ѝ вече беше епизодично. Вероятна причина за този спад е слабият ѝ резултат на контролна работа № 1. Преподавателят смята, че тя се е разочаровала, че вече няма възможност за висока оценка, откъдето се обяснява драстично намалената ѝ мотивацията. Иначе Г. Н. е сравнително активен участник в общата част на дискусияния форум – тя има 29 мнения в 8 теми. Въобще не изпитваше и притеснения да иска помощ от преподавателя и да предава частични решения, които впоследствие коригираше.

Д. И. е един от активните по време на упражнения студенти (има почти пълен сбор от присъствия), който обаче не успя да реши нито една задача докрай на контролните работи (съответно и на двете получи 0 точки). Евентуална причина за това е, че студентът не е присъствал редовно на лекции, както и че предаваше домашните си работи със значително закъснение – понякога след определения краен срок (въпреки което те все пак, по изключение, бяха приети). В началото предаваните решения на домашни работи бяха разписвани подробно, но постепенно (явно заради ограничено за студента време) започнаха да стават кратки и с пропуски на множество междинни стъпки в решенията.

Л. Т. също заслужава да бъде отбелязана като активен участник, въпреки ниския ѝ краен резултат. За голямо съжаление здравословни проблеми възпрепятстваха студентката да посещава редовно семинарни упражнения и лекции (тя не успя да се яви и на контролните работи), но за сметка на това същата прояви огромни усилия да навакса учебния материал чрез самоподготовка и успя да защити повече от половината домашни работи, които ѝ бяха поставени.

5.2.4. Статистически данни от дискусияния форум

Голямо количество от регистрираните студенти имат почти нулева активност във форума – цели 7 студента от общо регистрирани 19 нямат публикувано мнение, като повечето от тях са се регистрирали само за да изтеглят и евентуално разпечатат публикувания материал, свързан със семинарните упражнения.



Фигура 20. Брой мнения по раздели за експериментална група ПОМИ/ПОФМ 2012/2013 г.

Интересно е да се разгледа и активността на студентите във форума спрямо съдържанието на учебния материал. На фигура 20 се вижда отчетливо, че активността

във форума от темата „Формули на Крамер“ нататък устойчиво намалява, като в темата „Квадратични форми“ броят на мненията е наполовина на този от началните теми. С това може да се потвърди наблюдението на редица автори, че темите от курса по линейна алгебра с повече абстракция в учебния материал са по-трудни за студентите.

Трябва да бъдат отделени и няколко думи за технологиите, които студентите използват, за да въвеждат решенията на поставените им задачи. Като цяло може да се отбележи, че има установено предпочитание към equation editor в Microsoft Word (или разширената му версия MathType). Като стил и оформление повечето предадени решения се различават. Налична е и тенденция при повечето студенти думите на кирилица да бъдат изписвани с латински букви. Данните за технологиите за въвеждане на математически текст, които използват студентите с повече от 6 мнения във форума, са представени в таблица 9.

Инициали	Технологично средство за въвеждане на математически текст
В. З.	Microsoft Word 2007 equation editor
Л. Д.	Microsoft Word 2010 equation editor
И. Б.	CodeCogs Equation Editor
Л. Т.	CodeCogs Equation Editor и Microsoft Word 2003
Г. Н.	MathType
Е. Г.	CodeCogs Equation Editor
Д. И.	Microsoft Word 2007 equation editor
Си. Ко.	CodeCogs Equation Editor
Г. Т.	Microsoft Word 2007 equation editor
А. С.	Microsoft Word 2010 equation editor
Р. Я.	MathType
М. Ба.	Microsoft Word 2007 equation editor

Таблица 9. Използвани технологии от ПОМИ/ПОФМ 2012/2013 г.

На таблица 10 е представена съпоставка между експерименталната група ПОФМ от 2011/2012 г. и експерименталната група ПОМИ/ПОФМ 2012/2013 година. От данните е очевидно, че активността на студентите в дискусияния форум се е повишила значително.

Критерий	ПОФМ 11/12	ПОМИ/ПОФМ 12/13
Процент на регистрирани	6 от 12 – 50,00%	19 от 25 – 76,00%
Средно време за студент с активност във форума	124 минути, стандартно отклонение 88 минути	262 минути, стандартно отклонение 285
Получени точки от домашни работи (2,62% при контролна група)	0,91%	25,00%

Таблица 10. Статистически данни за форума от експерименти 1 и 2

5.2.5. Изводи от експеримент №2

На основата на проведения експеримент могат да се направят следните изводи:

- Работната хипотеза се отхвърля – експерименталният организационен модел НЕ повлиява на учебната група като цяло;
- Формулирана и приета е нова хипотеза – експерименталният организационен модел е повлиял значително върху малка част от експерименталната учебна група, но не е оказал влияние върху по-голямата част от студентите;
- Възможността да се коригират домашните работи и значително по-лесният достъп до помощ от страна на преподавателя по време на решаване на задачите вероятно водят до голямо увеличение на процента на защитени домашни работи;
- И при експеримент № 2 слабата подготовка по математика от училище продължава да бъде основен негативен фактор, който пречи на нормалното преподаване на материала по линейна алгебра;
- Въпреки положените усилия, студентите масово показват много нисък успех на контролни работи № 1 и № 2;
- Отсъствията от лекции и от упражнения силно затрудняват провеждането на семинарните упражнения.

На базата на тези резултати се прави заключение, че експеримент № 2 е проведен коректно. Резултатите от него показват, че приложеният организационен модел води до положителен резултат и повишава мотивацията и успеха на част от студентите в експерименталната група.

5.3. Експеримент № 3: “Информатика” студенти от 2 гр. и 3 гр. (сборна контролна група) и “Информатика” 1 гр. (експериментална група) през учебната 2012/2013 г., учебен предмет „Линейна алгебра и Аналитична геометрия“

Предварителното очакване на преподавателите към контролните и експерименталната групи беше да има по-добра предварителна подготовка по математика на студентите от специалност “Информатика” спрямо специалностите “ПОМИ” и “ПОФМ”. Това очакване беше оправдано само частично – преподавателите наистина губят по-малко време в обяснение на елементарни математически сметки, но като цяло нивото на предварителна подготовка по математика от средното образование и в специалност “Информатика” е ниско. Все пак разликата беше достатъчна, за да бъде компенсиран по-малкият учебен хорариум на сборния предмет “ЛААГ” спрямо отделните два “ЛА” и “АГ”. Иначе характерните за “ПОМИ”/“ПОФМ” негативни фактори отново бяха на лице – чести отсъствия на немалка част от студентите и неучастие в процеса на самоподготовка на голяма част от тях.

5.3.1. Сравнение на експерименталната и контролната групи

Учебните групи в специалност “Информатика” бяха три на брой. По план две трябваше да бъдат избрани като контролни, а една да бъде експериментална. За експериментална група по стечение на обстоятелствата се наложи да бъде избрана първа учебна група – други варианти не бяха възможни заради разпределението на часовете на преподавателите по други учебни предмети. По официален списък студентите от учебна

група 1 (експериментална) са 26, от учебна група 2 (контролна) са 26 и в учебна група 3 (контролна) са 27.

Отново голям се оказа броят на отписаните и отказалите се студенти. От експерименталната първа група са се отписали 5 студенти преди края на обучението, а 1 не се е отписал, но и не се е явил нито веднъж на упражнение или лекция по учебния предмет (този студент също е премахнат от статистиката). Така, реално, експерименталната първа група се състои от 20 студенти.

От контролната втора група са отписани 7 студенти. Други 3-ма студенти от тази група са чуждестранни – от република Македония. Те ще бъдат разгледани в изследването, но извън общата статистика. Така в контролната втора група се приема, че има 16 студенти.

От контролната трета група са отписани или преместени в други специалности 9 студенти. Чуждестранен студент – от Република Македония, е 1. Така се приема, че контролната трета група се състои от 17 студенти.

За съжаление, при сравнение със статистическия метод на Ман-Уитни се оказа, че има голяма статистически значима разлика между медианите на експерименталната и двете контролни групи при средния успех на оценките по математика от дипломите за средно образование. Причина за това е, че групите са се попълвали по реда на записване и вероятно е имало тенденция кандидат-студентите с по-висок успех да се записват по-бързо от тези с по-нисък. Подобна разлика би навредила на обективността на резултатите от провеждания експеримент. Поради тази причина в хода на работа бе взето решение допълнително да бъдат изключени от контролните групи такива студенти, които имат едновременно много ниски оценки по математика от дипломата си и имат слабо участие със съответно слаби крайни резултати на текущ контрол по “ЛААГ”. Критерийте за премахване бяха следните:

- Оценката по математика от дипломата да е по-ниска от добър 3,50;
- Общият брой точки от обучението по “ЛААГ” на текущ контрол да бъде по-нисък от средния за двете контролни групи взети заедно;
- Студентът да има отсъствия от повече от половината семинарни упражнения и лекции.

Количеството такива студенти се оказа много голямо. От контролната втора група бяха премахнати 6 студенти, а от контролната трета група – 9. По този начин останалите студенти от контролните групи остават значително по-малко и затова беше взето решение, че е целесъобразно да бъдат разгледани като една обща група от 18 студенти. В таблица 11 са представени резултатите на експерименталната група, а в таблица 12 са представени резултатите на контролната група, като допълнително е отбелязано кой студент е във втора и кой в трета учебна група.

Инициали	Пол	СОМД	СОДСО	КР1	КР2	УПР	ЛЕК	ДР	Общо
П. Д.	М	4.25	4.59	---	0	11	8	3	22
Д. Е.	М	3.25	3.66	---	---	5	2	6	13
В. И.	М	4.12	3.98	1	---	8	4	12	25
М. Г.	М	4.12	3.92	1	---	7	4	15	27
М. Б.	М	6.00	5.26	7	0	5	4	3	19
Н. П.	М	3.75	4.39	0	0	10	8	0	18
Нк. Д.	М	6.00	5.55	14	13	10	8	40	85
Х. Т.	Ж	5.24	5.63	14	14.5	11	8	40	88.5
Д. Д.	М	5.50	5.65	7	---	9	2	34	52
К. П.	М	3.67	3.81	---	0	4	0	0	4
Л. А.	М	6.00	5.44	6	---	11	8	29	44
В. Ва.	М	4.50	5.11	4	1	11	8	21	46
З. Д.	М	4.25	4.23	0	0	6	8	0	14
В.А.	Ж	3.50	4.89	---	0	11	8	9	28
С.Д.	М	5.50	4.79	0	0	5	4	0	9
И.Г.	М	3.75	5.00	0	---	10	8	24	42
Я.Б.	М	4.25	4.61	0	0	8	6	12	26
В.Во.	М	3.00	4.44	0	0	11	8	22	41
С.К.	Ж	3.25	4.07	---	---	4	0	0	4
А.Иб.	М	3.00	3.41	---	---	1	1	0	2

Таблица 11. Резултати на експериментална група Информатика 2012/2013 г.

Инициали	Пол	СОМД	СОДСО	КР 1	КР 2	УПР	ЛЕК	ДР	Общо точки
Студенти от втора учебна група									
К. Р.	М	3.42	4.50	1	0	1	8	0	10
С. Ч.	Ж	4.25	4.90	0	0	11	8	23	42
В. Д.	Ж	3.75	4.18	0	---	5	2	0	7
Б. Ч.	Ж	3.00	3.48	2	7	12	8	3	32
В. З.	Ж	3.25	4.51	1	0	12	8	5	26
А. П.	М	4.25	4.25	14	0	12	8	14	48
С. К.	М	4.00	4.50	2	3	12	8	16	41
М. Н.	Ж	4.00	4.50	---	---	3	2	0	5
В. Л.	М	5.00	5.02	---	---	0	0	39	39
Р. К.	Ж	4.25	4.41	9	6	12	8	24	59
Студенти от трета учебна група									
Д. А.	М	3.25	4.07	2	0	9	4	14	29
Г. В.	М	4.33	4.72	0	---	7	0	0	7
И. Т.	М	4.25	4.87	0	0	10	4	0	14
Г. Г.	М	3.25	3.80	0	0	11	6	0	17
В. И.	М	5.33	5.67	3	---	11	2	0	16
А. М.	Ж	4.00	5.16	0	0	4	0	0	4
Р. Ц.	М	5.00	5.71	0	0	3	6	0	9
К. И.	М	5.33	4.39	---	---	0	2	0	2

Таблица 12. Резултати на контролна група Информатика 2012/2013 г.

При така формираните групи, както следва, за експерименталната средният успех по математика от дипломите да средно образование е 4,35 (стандартно отклонение 0,99), а при контролната група 4,11 (стандартно отклонение 0,70). U-тестът на Ман-Уитни дава $U=162$ при $U_{crit}=112$, което еднозначно подкрепя нулевата хипотеза, че медианите на двете групи са статистически равни.

Средният успех от дипломите за средно образование при експерименталната група е 4,62 (стандартно отклонение 0,67), а при контролната група е 4,59 (стандартно отклонение 0,56). U-тестът на Ман-Уитни дава $U=178$ при $U_{crit}=112$, което отново потвърждава нулевата хипотеза, че медианите на групите са статистически равни.

5.3.2. Общи бележки относно проведения експеримент

В специалност „Информатика“ не е наличен проблемът с по-късното записване на студентите – спрямо новия календарен график на университета, или поне не в такава степен, както при “ПОМИ”/“ПОФМ”. Иначе и при специалност “Информатика” се наблюдаваха същите негативни фактори, както бяха наблюдавани при “ПОМИ”/“ПОФМ” в първите два експеримента. От една страна беше голям броят на студентите, които не посещават редовно учебните занятия. За експерименталната група под 3 присъствия на упражнения имаше 1 студент, а за контролната група 3-ма студенти. Под 6 присъствия на упражнения за експерименталната група имаха 6-ма студенти, а за контролната група 7. Положението с посещенията на лекции не е по-различно.

Според данните в таблица 11 и таблица 12 средната посещаемост на семинарни упражнения е 7,90 за експерименталната група и 7,50 за контролната група. Голям е броят и на студентите, които въобще не се явяват на контролни работи № 1 и № 2. За експерименталната група това са 6 студенти на КР 1 и 8 студенти на КР 2, а за контролната група са съответно 3 и 6. Много голям е броят и на студентите, които изкарват по 0 точки при явяването си на контролна работа. За експерименталната група това са 6-ма студенти за КР 1 и 9 на КР 2, за контролната група са съответно 7 и 9.

Що се отнася до предаването и защитата на домашни работи, при експерименталната група се наблюдава значително подобрение както спрямо контролната група, така и спрямо статистиката от експеримента проведен при “ПОМИ”/“ПОФМ”. Взимайки под внимание целите групи, за експерименталната група непредалите/незащитилите нито една домашна работа са 6-ма студенти, докато при контролната група са 10. Общият брой точки, събран от домашни работи за експерименталната I-ва група, е 270 т. (от 800 възможни), а за контролната група – 138 (от 720 възможни). При посещенията на лекции експерименталната група има 107 събрани точки (от 160), а за контролната група 84 (от 144).

Съпоставката за среден брой точки от текущ контрол между експерименталната и контролната група е следната:

- 30,48 т. за експерименталната група срещу 22,61 т. за контролната група, ако се вземат под внимание всички студенти. Съответните стандартни отклонения са 23,61 и 16,92;
- 31,97 т. за експерименталната група срещу 23,73 т. за контролната група, ако се изключат студентите с под три присъствия на семинарни упражнения. Съответните стандартни отклонения са 23,28 и 16,90;
- 39,89 т. за експерименталната група срещу 30,09 т. за контролната група, ако се изключат студентите с под шест присъствия на семинарни упражнения. Съответните стандартни отклонения са 20,03 и 15,38.

Представените дотук данни показват видимо по-високи резултати на експерименталната група спрямо контролната. Прилагането на U-теста на Ман-Уитни при $\alpha=0,05$ за общия брой точки на студентите показва следните резултати:

- $U=149$ при $U_{crit}=112$ – при разглеждане на всички студенти, при което се приема нулевата хипотеза, че няма разлика между медианите;
- $U=116,5$ при $U_{crit}=85$ – при разглеждане само на студентите с повече от едно присъствие на семинарни упражнения, при което се приема нулевата хипотеза, че няма разлика между медианите;
- $U=60$ при $U_{crit}=40$ – при разглеждане само на студентите с повече от пет присъствия на семинарни упражнения, при което се приема нулевата хипотеза, че няма разлика между медианите.

Вижда се, че и тук, както при експеримент № 2, може да се направи заключение, че експерименталният организационен модел не е повлиял на цялата група, а е активизирал само малка част от студентите. Разликата в средния брой точки е относително по-малка спрямо получената в експеримент № 2, но това е очаквано с оглед на обстоятелството, че разработените интерактивни методи за обучение бяха приложени само при обучение по ЛА, но не и по АГ.

5.3.3. Чуждестранни студенти

От всички студенти в специалността най-голямо внимание заслужава О. М. – студент с македонско гражданство от II-ра учебна група. Той е единственият студент, който получава пълен сбор точки и на контролна работа № 1, и на контролна работа № 2. Това, което е особено при него, е, че той се включи доброволно – по собствена инициатива, в експерименталния дискуссионен форум и лично изиска да му бъдат предоставени задачи за домашна работа. Обяснението на студента, след като беше уведомен, че решаването на такива задачи не му носи точки към оценката за текущ контрол, беше следното:

*„Здравейте г-н Петров,
Правя домашните само от желание да спечели хубави знания по това дисциплина. Тук няма грешка, г-жа Кацарска казва че ние можем да направим регистрация и да решаваме задачи.
P.S. Извинявам се за много лошен български“*

Естествено, подобна висока мотивация за работа може само и единствено да радва преподавателите. Единствената причина, поради която О. М. няма отлична оценка по дисциплината е, че той спира да предава и защитава домашни работи от средата на курса нататък. Причината за това остана неизяснена.

Освен добрия резултат на О. М., може да се твърди, че чуждестранните студенти като цяло се отличават в положителна посока спрямо българските. Това може да бъде наблюдавано в таблица 13.

Инициали	Пол	ОЦЕНКА	КР 1	КР 2	УПР	ЛЕК	ДР	Общо
О. М.	М	Мн. Добър 5	20	20	12	8	20	80
А. С.	М	Слаб 2,50	14	3	12	8	0	37
Ад. А.	Ж	Добър 4	8	---	12	8	28	56
Л. Д.	М	Добър 3,75	6	4	9	8	27,5	54,5

Таблица 13. Резултати на чуждестранни студенти в Информатика 2012/2013 г.

Дори точките на А. С. – чуждестранния студент с най-слаб резултат – са над средните за всички учебни групи.

5.3.4. Характеристика на някои от по-изявените студенти

От експерименталната група могат да бъдат отличени Нк. Д., Х. Т., Д. Д. и Л. А. Това са четиримата студенти, които се включват най-активно в дискусияния форум и спокойно могат да бъдат определени като „водачи“ на своята учебна група.

Нк. Д. е леко затворен и необщителен, но много усърден в изпълнението на учебни задачи. По-скоро може да бъде определен като слаб интроверт. Личи си, че лесно се справя с абстрактни знания и дори демонстрира лека досада, когато се налага преподавателят да дава елементаризирани примери. С лекота детайлно разписва решенията на задачите с редактора в дискусияния форум, което показва добро ниво на компютърна грамотност. Не търси контакт с преподавателя за помощ или консултации. По време на семинарни упражнения не задава въпроси, но следи много внимателно решенията на задачите и прави забележки, ако види неточност или техническа грешка от страна на преподавателя или друг студент, който решава задача на дъската.

Х. Т. рядко се включва в дискусии по време на семинарни упражнения и видимо не обича да участва в интерактивните методи на обучение. За сметка на това тя винаги предава решенията на домашните си работи в кратки срокове (1 до 2 дни, след като са й зададени). Освен това е много активна в дискусияния форум, следи внимателно учебните ресурси, които се прикачват, и понякога взема лично отношение по тях – нещо, което почти не се забелязва при другите студенти.

Д. Д. е един от силните студенти в групата и е активен участник по време на семинарни упражнения. Също така предава и защитава домашните си работи в срок. Като тип на личността е по-скоро амбиверт – не се налага над другите, но и не крие собственото си мнение. По-скоро визуален тип – предпочита да учи чрез практически примери, а не с абстрактни модели. Слабият му резултат на контролна работа № 1

определено изненада преподавателя, а невявяването му на контролна работа № 2 затвърди по-слабата оценка по учебния предмет.

Л. А. също може да бъде определен като „изненада“ за преподавателя поради слабия си краен резултат на текущ контрол. По време на семинарни упражнения беше изключително активен и с лекота се включваше в дискусиите. Може да бъде определен като лек екстroversert. Справяше се еднакво добре както с практическите примери, така и с по-абстрактните знания. В дискуссионния форум се включваше с известно закъснение за решаване на домашните си работи, но все пак защити успешно голяма част от тях. Подобно на Д. Д. обаче получи необяснимо слаб резултат на контролна работа № 1, а впоследствие не се яви на контролна работа № 2.

5.3.5. Статистически данни от дискуссионния форум

Подобно на експерименталната група от експеримент № 2, и тук се забелязва лек спад между първата и втората част на учебния курс. Все пак тук данните са по-устойчиви и спадът е под 30% (при експеримент № 2 беше над 50%). Броят мнения по раздели за домашните работи е показан на фигура 21.



Фигура 21. Брой мнения по раздели за експериментална група “Информатика” 2012/13 г.

Позитивно е, че всички студенти от групата си регистрираха акаунт в дискуссионния форум. От друга страна активността не е висока – едва средно 4,96 мнения на студент при стандартно отклонение 5,09. Все пак разликата между тези данни и резултатите от експеримент № 2 могат да се обяснят със значително по-точните решения на задачите и по-малкото технически грешки, които допускат студентите (съответно преподавателят по-рядко ги кара да пишат повторно във форума с поправки на решенията си). Отново се наблюдава тенденцията голяма част от студентите да са само пасивни ползватели на ресурси във форума – цели 5-има от тях нямат нито едно публикувано мнение.

Изключвайки тези студенти от статистиката, се получават средно 7,93 мнения на студент при стандартно отклонение 4,22.

Критерий	Информатика 2012/2013
Процент на регистрирани студенти в	20 от 20 – 100,00%
Среден брой мнения на студент	4,96
Средно време за студент с активност във форума	174 минути, стандартно отклонение 190 минути
Предадени и защитени домашни работи (19,17% при контролната група)	33,75%

Таблица 14. Статистически данни за форума за експеримент 3

В таблица 14 се вижда, че средното време, прекарано във форума, е значително по-малко от средното за групата от експеримент № 2, но видимо повече от групата от експеримент № 1 (данните за тях са налични в таблица 10). Предадените и защитени домашни работи са над 1/3 от всички възможни, което е значително повече спрямо контролната група. Процентът е по-висок и спрямо експерименталната група от експеримент № 2, където защитените домашни работи са малко под 1/5 от всички възможни (таблица 10). При всички случаи се виждат еднакви тенденции между експеримент № 2 и експеримент № 3.

Технологично средство за въвеждане	Брой студенти, използващи
Microsoft Word 2003 equation editor	3
Microsoft Word 2007 equation editor	3
CodeCogs Equation Editor	4
OpenOffice	1
Снимка	2
Снимка + CodeCogs Equation Editor	1
Снимка + Word 2007	1

Таблица 15. Използвани технологии от Информатика 2012/2013 г.

Използваните технологии за въвеждане на математически формули ще бъдат разгледани обобщено в таблица 15. Прави впечатление, че четирима студенти прибегват до използването на техниката да решат задачата на лист хартия, след което да заснемат решението с фотоапарат и да прикачат снимката – при експеримент № 2 нямаше нито един студент, използвал този начин на публикуване на решения. Двама от тях са използвали само и единствено тази техника, а други двама са я използвали в комбинация с други технологии (използвали са снимковия материал, когато не са успяли да се справят с форматирането на текста, ползвайки основната технология, която употребяват).

Вижда се, че и тук има голямо разнообразие от използвани технологии. Отново софтуерът на Microsoft е доминиращ при избора на студентите, но като цяло не може да бъде дадено еднозначно заключение за предпочитанията им. Това отново потвърждава мнението, че развитието на технологиите за въвеждане на математически текст е все още широко отворена територия за работа на софтуерни разработчици.

5.3.6. Изводи от експеримент № 3

На основата на проведения експеримент могат да се направят същите (или с голяма доза сходство) изводи, както и при експеримент № 2:

- Работната хипотеза се отхвърля – експерименталният организационен модел НЕ повлиява на учебната група като цяло;
- Формулирана и приета е нова хипотеза – експерименталният организационен модел е повлиял значително върху малка част от експерименталната учебна група, но не е оказал влияние върху по-голямата част от студентите;
- Възможността да се коригират домашните работи и значително по-лесният достъп до помощ от преподавател по време на решаване на задачите вероятно водят до голямо увеличение на процента на защитени домашни работи;
- Подготовката по математика от училище при специалност “Информатика” е значително по-добра от тази при специалности “ПОМИ” и “ПОФМ”, като общото ниво може да се приеме за добро (но не отлично) за провеждане на обучение по линейна алгебра;
- Чуждестранните студенти показват значително по-висок успех от българските си колеги;
- Отсъствията от лекции и от упражнения силно затрудняват провеждането на семинарните упражнения.

На базата на тези резултати се прави заключение, че експеримент № 2 е проведен коректно. Резултатите от него показват, че въведеният организационен модел води до положителен резултат и повишава мотивацията и успеха на част от студентите в експерименталната група.

5.4. Експеримент № 4: КСТ II-ра група през учебната 2011/2012 г.

В този експеримент не е правено изследване около интерактивните методи на обучение по време на провеждане на семинарните упражнения и съответно няма нужда от изследване на психологическите особености на студентите. Също така изискването за предаване на домашни работи в електронен вид не е задължително, а студентите могат да предават своите домашни работи и на хартиен носител, следователно резултатите на експерименталната група не могат да бъдат използвани за проверка на работната хипотеза. Събраните данни могат да бъдат използвани само и единствено за оценка за това доколко студентите са склонни доброволно да участват в електронното обучение и коя част от студентите ще го направи (хипотезата естествено е, че това ще са по-силните студенти от групата).

5.4.1. Общи бележки относно проведения експеримент

В учебната група на експеримента са записани общо 30 студенти. Предложена им е възможност за предаване на половината от домашните им работи (тези от областта на

линейна алгебра) в дискуссионния форум. Потребителски профил във форума си регистрират малко над половината от студентите – 17 на брой. Едва трима от тях обаче се включват активно и предават поставените им домашни работи. Именно двама от въпросните трима студенти са тези, които постигнаха най-висок успех на текущ контрол в учебната група.

5.4.2. Статистически данни от дискуссионния форум

Изключително слабият интерес към предаване на домашни работи в електронен вид е ясно свидетелство за това, че студентите не са изпитали комфорт в предоставената им възможност. Вероятно нуждата от допълнително време, което е трябвало да отделят, ги е отблъснала. Въпреки липсата на активно включване чрез писане, престоят на студентите от групата на КСТ в дискуссионния форум все пак не се свежда до еднократна регистрация. Част от регистрираните студенти най-малкото са използвали форума за четене на помощни материали и използване на помощен софтуер. Данните са представени в таблица 16.

Трябва да се отбележи, че в представената статистика се отчитат и петима от регистрираните студенти, които освен регистрацията си не са извършили почти никакво друго действие в системата, съответно тяхното средно време на активност се приема за 0 минути. Освен това процентът на предадени и защитени домашни работи е на базата само на домашни работи по линейна алгебра – в статистиката не се отчитат домашните работи по аналитична геометрия, които са предавани от всички само на хартия. Иначе точките, които са получени от задачи за домашна работа по линейна алгебра, са 186 за цялата група (от 600 възможни). От тях 40 или 21,50% са получените от тримата студенти в дискуссионния форум.

Относно използваните технологии – един от студентите е използвал MathType, един е използвал Word 2007 и един Word 2003.

Критерий	“Информатика” 2012/2013
Процент на регистрирани студенти в	17 от 30 – 56,57%
Среден брой мнения на студент	1,71
Средно време за студент с активност във форума	52 минути, стандартно отклонение 88 минути
Предадени и защитени домашни работи чрез дискуссионния форум	7,78%

Таблица 16. Статистически данни за форума от експеримент 4

5.4.3. Изводи от експеримент №4

Въз основа на проведения експеримент могат да се направят следните изводи:

- Повечето от студентите нямат мотивация да участват доброволно в предаване на домашни работи в електронен вид. Мнозинството от тях предпочитат да ги предават по стандартния начин – на хартия;

- Дискусионният форум е предизвикал интерес при някои от студентите като източник за изтегляне на учебни ресурси.

5.5. Експеримент № 5: КТТ (експериментална група) и “Електроника” (контролна група) през учебната 2012/2013 г.

Експеримент № 5 цели да установи доколко системата за електронно обучение чрез дискуссионен форум влияе на резултатите на студентите. Тук разлика между експерименталната и контролната групи има само и единствено при процеса на самоподготовка – в експерименталната група студентите са заставени да предават домашните си работи в електронен вид, а в контролната група ги предават на хартиен носител. В провеждането на семинарните упражнения се приема, че не се прави разлика между групите.

5.5.1. Сравнение на експерименталната и контролните групи

В експерименталната група по списък има записани 31 студенти. От тях 5 студенти се отписват преди завършването на семестъра, а 1 по неясни причини не участва въобще в учебния процес по линейна алгебра и аналитична геометрия. Тези 6 студенти са изключени от статистиката и така учебната група се приема за съставена от 25 студенти.

В контролната група има записани 30 студенти. Преди завършването на семестъра се отписват цели 14 студенти. Въпреки че трима от тях имат дейно участие почти до самия край на семестъра, те също следва да бъдат изключени от статистиката, понеже не са се явили на контролна работа № 2. Така се приема, че контролната група се състои от 16 студенти.

Преподавателят, водещ семинарни упражнения, е един и същ и за двете групи – гл. ас. Анка Марковска. За експерименталната група средният успех от обучението по математика в училище е 3,93 (стандартно отклонение 0,63), а при контролната група е 3,71 (стандартно отклонение 0,77). U-тестът на Ман-Уитни показва $U=141,5$ при $U_{crit}=126$, което приема нулевата хипотеза и съответно се приема, че медианите са статистически равни. Същото е положението и със средния успех от дипломата за средно образование – при експерименталната група той е 4,50 (стандартно отклонение 0,44), а при контролната група е 4,29 (стандартно отклонение 0,57). Прилагането на U-теста на Ман-Уитни показва $U=159$ при $U_{crit}=126$, което отново приема нулевата хипотеза. Данните са представени в таблица 17 и таблица 18.

5.5.2. Общи бележки относно проведения експеримент

При експеримент № 5 се наблюдава по-слабо негативният ефект от експеримент № 1 и експеримент № 4 – студентите от експерименталната група приемат по-сериозно задължението да предават домашните си работи по линейна алгебра в електронен вид.

В таблица 17 са представени данните за предадените домашни работи и резултатите от контролни работи за експерименталната група. Общият брой точки от домашни работи е 411, а от тях 162 са изкарани в дискуссионния форум. Това прави 39,42% при очаквани (възможни) 50,00% (половината от точките за домашни работи са от линейна алгебра, които се предават в електронен вид, другата половина са от аналитична геометрия, които се предават на хартия). Тези резултати показват, че вероятно някои студенти са изпитали проблем с работата с дискуссионния форум. Все пак трябва да се отбележи, че 100% от студентите в експерименталната група се регистрират във форума и само петима от тях нямат никакво публикувано мнение в него – резултат, сходен с резултата от експеримент № 3 при специалност “Информатика”.

Инициали	Пол	СОМД	СОДСО	КР 1	КР 2	ДР Общо	ДР ДФ	Общо
К. Г.	М	4,25	3,96	7	5	16	0	28
М. М.	М	3,25	3,89	5	4	24	0	33
Д. Б.	М	5,00	4,80	5	1	20	12	26
С. Г.	М	4,00	4,91	4	0	18	3	22
М. С.	Ж	3,75	4,71	5	0	30	15	35
М. К.	М	3,25	4,39	3	0	5	6	9
С. И.	М	3,25	3,58	0	0	12	9	12
Б. И.	М	5,00	4,66	11	7	15	6	33
А. М.	М	5,75	5,15	12	8	12	0	32
М. А.	М	4,00	4,19	5	0	9	3	14
Р. Ш.	М	4,50	4,59	11	12	26	0	49
Г. К.	М	4,00	4,45	6	5	16	0	27
А. Х.	М	3,50	5,02	6	3	17	9	26
Д. Е.	М	3,75	4,19	3	0	5	6	9
А. Ч.	М	3,34	4,92		1	15	15	16
И. К.	М	3,00	4,37	4	0	6	3	10
В. Д.	М	3,75	3,82	10	2	15	15	27
А. К.	М	3,75	4,41		1	15	15	16
К. Б.	М	3,75	4,22	2	2	27	12	31
М. В.	М	4,25	4,57	4	2	20	9	26
Д. В.	М	3,75	4,49		3	0	0	3
Х. Х.	М	3,25	4,81	3	3	21	15	27
И. Д.	М	4,50	5,54	6	2	20	3	28
Д. А.	М	4,00	4,66	10	3	14	0	27
Е. М.	М	3,75	4,12		2	31	6	33

Таблица 17. Резултати на експериментална група КТТ 2012/2013 г.

Легенда:

ДР Общо – Общо получени точки от предадени домашни работи;

ДР ЕУ – Точки от домашни работи, предадени в дискуссионния форум.

При прегледа на резултатите на контролната група (таблица 18) моментално се откроява значително по-високият им общ брой точки. Докато за експерименталната група студентите събират средно 23,96 точки (стандартно отклонение 10,29), при контролната събират 31,56 (стандартно отклонение 11,82). U-тестът на Ман-Уитни показва $U=113,5$ при $U_{crit}=126$, което отхвърля нулевата хипотеза, т.е. приемаме, че

медианата на общия брой точки на студентите от контролната група е по-висока от тази на експерименталната група. На фона на по-добрия резултат от дипломите за средно образование на експерименталната група, тези резултати изглеждат изненадващи. Поради тази причина е направен допълнителен статистически анализ на резултатите от контролните работи на студентите. Той показва, че в експерименталната група са получени средно 7,52 точки на студент от контролни работи (стандартно отклонение 5,94), а при контролната група точките са средно 3,75 (стандартно отклонение 5,17). U-тестът на Ман-Уитни показва $U=104,5$ при $U_{crit}=163$, което отхвърля нулевата хипотеза и се приема, че медианата на общия брой точки, натрупани само от контролни работи на експерименталната група, е статистически по-голяма от тази на контролната група.

Инициали	Пол	СОМД	СОДСО	КР 1	КР 2	ДР	Общо
К. Г.	М	3.25	4.78	2	0	25	27
Д. Н.	М	3.50	3.60	2	0	34	36
Г. К.	М	3.00	3.26	2	0	32	34
И. Щ.	М	3.25	4.28	2	0	29	31
В. В.	М	5.75	5.36	5	6	40	51
А. Б.	М	3.00	4.20	0	0	37	37
В. И.	М	3.33	3.52	4		30	34
А. Д.	М	3.75	3.84		5	8	13
Б. Б.	Ж	4.25	4.89		5	15	20
С. П.	М	3.75	4.40	7		23	30
Н. Д.	М	4.50	4.85			26	26
С. Б.	М	3.75	4.00	0		28	28
Н. Б.	М	3.25	4.09			38	38
Ф. О.	Ж	5.00	4.90	20		38	58
Б. М.	М	3.00	3.93	0		9	9
В. К.	Ж	3.00	4.74	0	0	33	33

Таблица 18. Резултати на контролна група Електроника 2012/2013 г.

При експерименталната група има средно 15,12 точки, получени от домашни работи (стандартно отклонение 9,00), спрямо 27,81 (стандартно отклонение 9,60) при контролната група. U-тестът на Ман-Уитни за точките от домашни работи показва $U=71$ при $U_{crit}=163$, което, от своя страна пък, показва, че медианата на контролната група е значително по-голяма от тази на експерименталната група.

Направеният анализ разкрива, че студентите от експерименталната група са с по-нисък успех спрямо контролната група поради значително по-малко предадени и защитени домашни работи. Изводът, който логично може да се направи, е, че въведеното изискване за предаване на домашни работи в електронен вид е навредило на успеха на студентите в експерименталната група.

5.5.3. Изводи от експеримент № 5

На базата на проведения експеримент могат да се направят следните изводи:

- Изискването за предаване на домашни работи в електронен вид довежда до по-малко предадени и защитени домашни работи и от там предизвиква намаляване на успеха на студентите;
- Студентите изпитват затруднения при предаването на домашни работи в електронен вид.

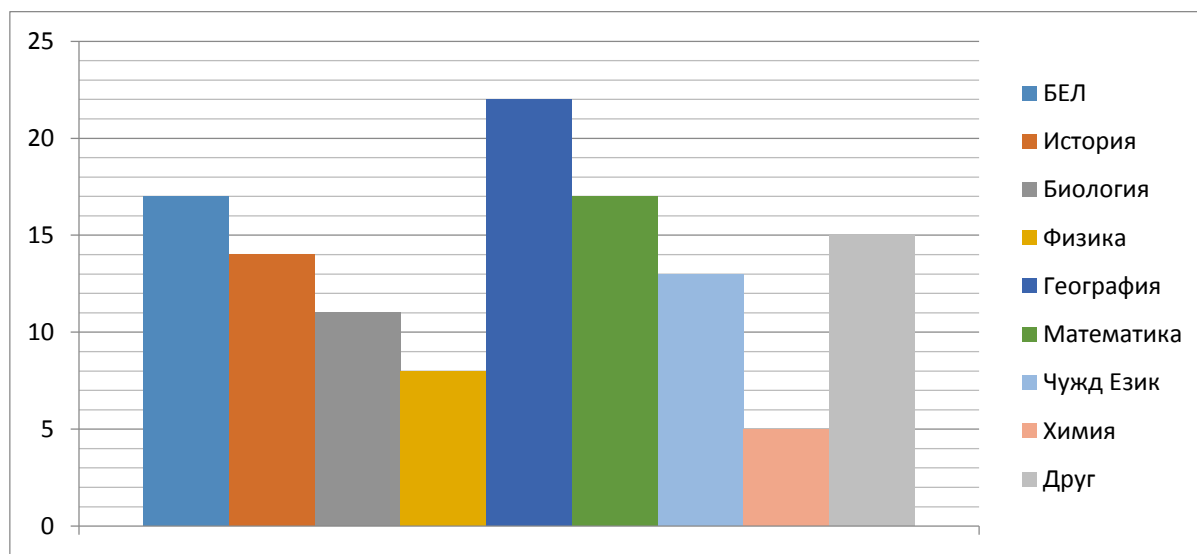
Тези изводи потвърждават и наблюденията, направени в експеримент № 4.

5.6. Анкета

Осъществена е анкета, чрез която се цели да се проучи мнението на студентите относно предаването на домашни работи в електронен вид. Чрез тази анкета може да се определи доколко затрудненията на студентите са били свързани с технически проблеми и доколко със слаба мотивация към учебния процес по принцип. Анкетата е проведена анонимно сред студентите от всички експериментални групи, като участието в нея беше пожелателно.

Общо анкетираните студенти бяха 64-има. Анкетата се състои от 5 въпроса. Там, където общият сбор на отговорите е по-малък от 64, е по причина, че даден/и студент/и са пропуснали да отговорят на съответния въпрос. На въпрос № 1 пък е позволен множествен избор на отговори. Въпросите са подредени в градация – от по-общи към по-конкретни, за поставената цел. Те са от затворен тип (с формулирани готови отговори, от които анкетируаният избира), като в последните два от тях е оставено и поле за свободно пояснение от страна на отговарящия. Областите, които се обхващат, са предварителната подготовка и учебни интереси на студентите, възприятието им за курса „Линейна алгебра“ като цяло, както и оценката на студентите за проведеното електронно обучение.

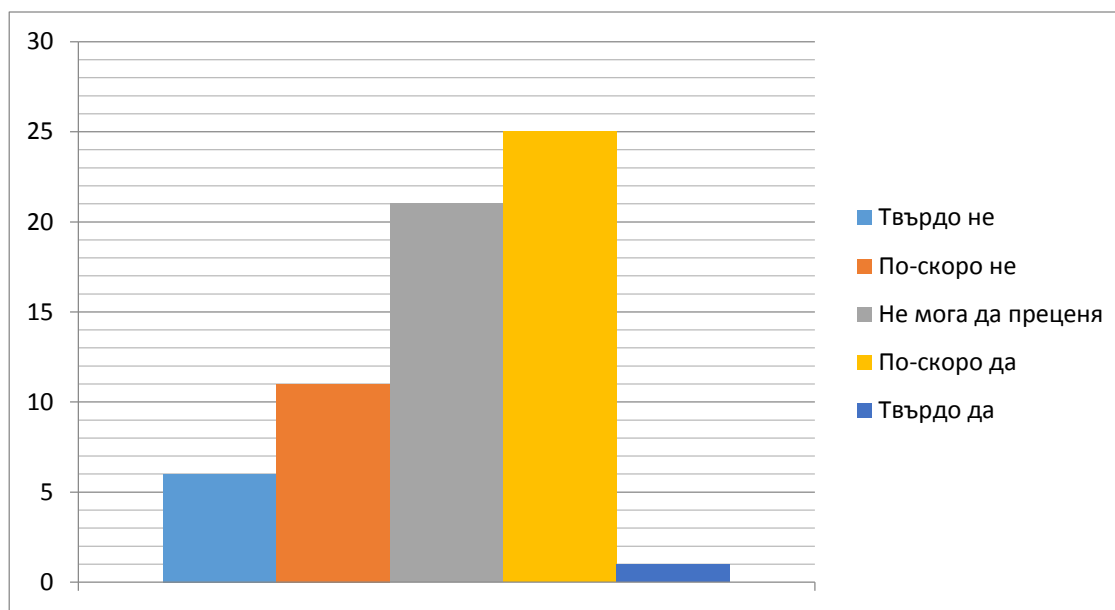
Въпрос 1. Кой учебен предмет в училище харесвахте? (фигура 22)



Фигура 22. Предпочитания на студентите към учебен предмет от средното образование

Както се вижда, едва 17 от 63-мата студенти са отбелязали математиката като харесван учебен предмет от училище. Също така се забелязва, че студентите не са в хомогенна група, а имат много разностранни интереси. Все пак математиката е един от трите най-харесвани учебни предмети.

Въпрос 2. Смятате ли, че предметът „Линейна алгебра“ ще има практическо приложение в по-нататъшното Ви обучение и в бъдещата реализация на пазара на труда? (фигура 23)



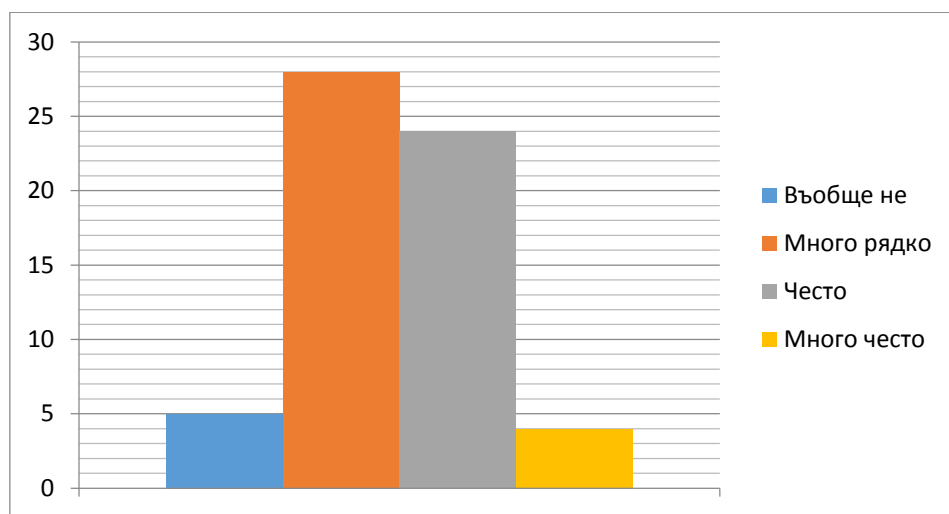
Фигура 23. Мнение на студентите за практическата приложимост на Линейна Алгебра

Важно е да се отбележи, че в никакъв случай не се очаква студентите да могат да дадат обективна оценка по поставения им по този начин въпрос. Даването на подобни оценки може да се извърши само от дистанцията на изминало време и натрупан практически опит, но не и по време на самото усвояване на знанията по учебния предмет. В такъв смисъл поставянето на този въпрос цели по-скоро да бъде измерена искреността на отговорите на студентите, а не той да осигурява представителна информация за самия учебен предмет и учебното му съдържание. Логичният отговор на един първокурсник би бил „Не мога да преценя“, който е и вторият по брой отговори избор. Първенството на отговора „По-скоро да“ вероятно се дължи на практическите задачи, които бяха подбрани и представени по време на интерактивното обучение.

Въпрос 3. Използват ли се знания от предмета „Линейна алгебра“ в другите учебни предмети? (фигура 24)

Проблемът за задълбочаване на междупредметните връзки винаги е бил от първостепенна важност за качеството на образованието. Това се отнася в още по-голяма степен за обучението в специалностите, свързани с педагогиката, а голяма част от участвалите в анкетата студенти са именно от такива специалности. Важно е още от самото начало студентите да осъзнаят, че няма „излишни учебни предмети“ и че те са тясно свързани помежду си, което е и същината на всяка една учебна програма.

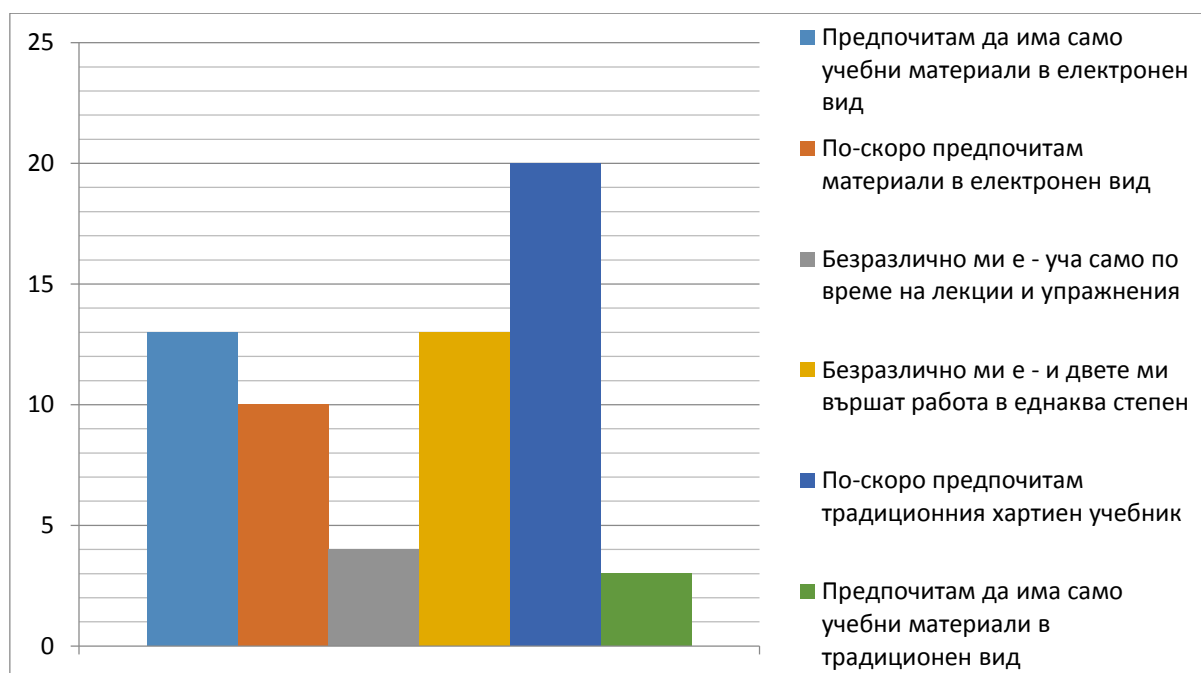
Осъзнаването на това винаги е водещо за по-голямата мотивация на студентите при изучаването дори на учебни предмети, които не са им приятни.



Фигура 24. Мнение на студентите за междупредметните връзки

Аналитичната геометрия активно използва знания от линейната алгебра и очакваните резултати от анкетата бяха да няма много отговори в двете крайности на отрицанието или строгото потвърждение. Реалните резултати от анкетата потвърждават това. В неформален разговор с няколко студенти се потвърдиха подозренията, че именно пряката връзка между линейна алгебра и аналитична геометрия е била основен фактор за получаването на тези резултати.

Въпрос 4. Как ще сравните традиционните учебници спрямо електронните учебни материали? (фигура 25)

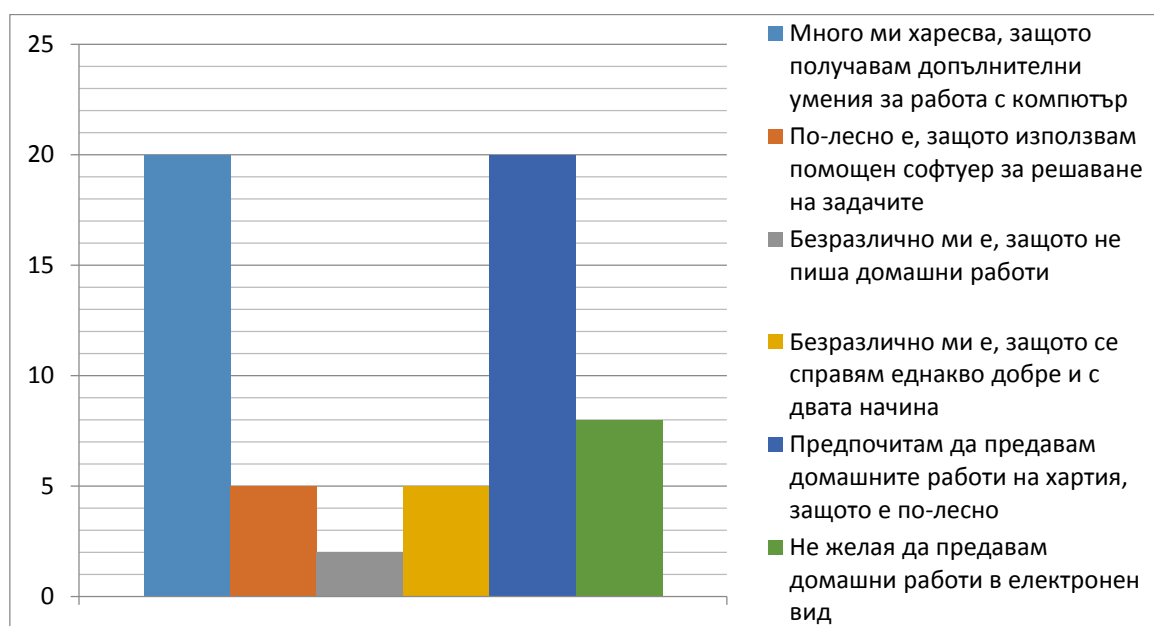


Фигура 25. Мнение на студентите за учебните материали в електронен вид

Наблюдава се липса на еднозначен отговор, въпреки че предпочитанията към „традиционния хартиен учебник“ са количествено повече. Някои от поясненията, като отговор на допълнителния въпрос „защо“, са:

- „Защото съм свикнал на хартия и ми е по-лесно за писане на задачите“ – студент, отговорил с категорична подкрепа на традиционните учебни материали;
- „Не всеки има възможността“ – студент, който няма компютър, и поради тази причина настоява за традиционни учебни материали;
- „Не обичам да седя на компютър“ – студент, отговорил, че по-скоро предпочита традиционния хартиен учебник;
- „Чувството да прелистваш страници е по-приятно“ – студент, отговорил, че по-скоро предпочита традиционния хартиен учебник;
- „По-удобни са“ – студент, отговорил, че по-скоро предпочита традиционния хартиен учебник;
- „Не ми се учи вкъщи“ – отговор на единствения студент, който заявява, че учи само по време на упражнения и лекции
- „По-лесно уча на компютър“ – студент, който по-скоро предпочита електронни учебни материали;
- „Може да се учи на много устройства (таблет, смартфон, РС)“ – студент, който по-скоро предпочита електронни учебни материали;
- „Много по-практично е, защото, ако си сбъркал или искаш да добавиш нещо, винаги можеш да го редактираш“ – студент, категорично подкрепящ електронните учебни материали
- „Защото подбирам най-важното, принтирам само него и след това четенето е много по-лесно“ – студент, категорично подкрепящ електронните материали

Въпрос 5. Какво мислите за предаването на домашни работи в електронен вид? (фигура 26)



Фигура 26. Мнение на студентите за предаване на домашни работи в електронен вид

Що се отнася до същината на представения метод, от анкетата еднозначно се вижда, че голяма част от студентите не одобрява предаването на домашните работи в електронен вид. За изследването от особен интерес са пояснителните отговори на тези петима от студентите, които са отбелязали категоричен отказ от предаване на домашни работи в електронен вид и са дали писмено пояснение защо. Поясненията са следните:

- „Нямам достатъчно време“;
- „Нямам интернет в квартирата и трябва да ги пиша събота и неделя в Радомир“;
- „Няма да бъде сигурна дали е по точния начин“;
- „На хартия повече ми харесва“;
- „Губи се време и е по-сложничко“.

Получените от анкетата резултати определено дават негативен образ на приложения метод за предаване на домашни работи в електронен вид. Вижда се ясно изразено нежелание на повечето от студентите да се включат в електронното обучение. Това явно се потвърждава и от проведените експерименти № 4 и № 5. Съответно, може да се направи заключение, че опитът за улесняване на учебния процес чрез включване на мултимедия и електронно обучение определено не е достатъчен, а положителните резултати от експеримент № 2 и частично положителните резултати от експеримент № 1 и експеримент № 2 са получени заради интерактивните методи на обучение по време на семинарни упражнения, а не са следствие от електронното обучение.

5.7. Общи статистики от дискусияния форум

Очаквано, най-голям интерес за студентите представляват разделите с домашни работи. Те са получили приблизително пет пъти повече преглеждания спрямо раздела с учебните ресурси. Разликата се смята за нормална, защото дори след даване на решение на задача студентите се връщат обратно да видят своето решение, отговарят на допълнителни въпроси и т.н.

Общи дискусии въобще не са проведени дори когато е имало инициатива от преподавателя. Студентите предпочитат да комуникират помежду си само в закрыта комуникация чрез лични съобщения. В тях основно се дискутират въпроси около учебната програма и изпитите, но не и свързани с учебния материал. Случаите, в които един студент е помагал на друг относно въпроси, свързани с домашната работа, са изключително малко. Погледнато като цяло, общият брой на личните съобщения между студенти е малък – 104.

От учебните ресурси най-голям интерес има към електронния вариант на задачите, решавани по време на семинарни упражнения. Задачите от темите в началото на курса са посещавани повече, в сравнение с темите от края на курса. От софтуерните продукти най-голям интерес предизвикват уеб базираните. Различните упражнения са посещавани между 70 и 175 пъти. Най-много посещения има MatrixCalc (156) и видео уроците за

писане на математически формули във форума и в Microsoft Word (195). Диалогово-обучаващите програми получават много слаб интерес, като софтуерът за самоподготовка по темата „Матрици и операции с матрици“ е изтеглен 34 пъти, а програмите за обучение по темите “Евклидови и унитарни пространства” и “Квадратични форми” са били изтеглени едва по 13 пъти всяка. Статистическите данни, събрани от трите разработени софтуерни продукти, също показват слаб интерес –студентите, които са ги изтеглили, в по-голямата си част са ги използвали за прекалено кратко време. Последното е и причината да не бъде проведено изследване за ефекта на диалогово-обучаващите програми върху организационния модел – при толкова слаб интерес той по-скоро би следвало да бъде пренебрегнат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Като основни приноси на дисертационния труд могат да бъдат открити:

- *Научно-приложни* –
 - Теорията за програмирано обучение чрез диалогово-обучаващи програми е прецизирана и обогатена. Поставени са основите за нейното ефективно свързване с Уеб 2.0 обучението;
 - Разработен е модел за автоматично оценяване в диалогово-обучаващи програми;
 - Разработен е организационен модел за провеждане на семинарни упражнения и самоподготовка по линейна алгебра, технологично подпомогнати чрез средства за уеб 2.0 обучение;
- *Приложни* –
 - Разработена е система от задачи от областта на математическото моделиране, които се решават с апарата на линейната алгебра;
 - Разработени са първи прототипи на диалогово-обучаващи програми за целите на обучението по линейна алгебра;
 - Направен е анализ на различни технологии за въвеждане и изобразяване на математически текст в уеб форми;
 - Адаптирани и практически изпробвани са интерактивни методи за обучение по линейна алгебра.

На основата на проведените пет експеримента бяха направени *следните заключения*:

- Отхвърля се работната хипотеза;
- Приема се, че експерименталният организационен модел е повлиял значително само върху малка част от експерименталната учебна група;
- По-високият успех на студентите, които са повлияни от организационния модел в експерименталните групи, е следствие от интерактивните методи на обучение по време на семинарни упражнения;
- Избраните технологични средства в предложения организационен модел подпомагат предимно студентите с по-висока предварителна мотивация за учене;
- Системните отсъствия от семинарни упражнения са основен проблем при обучението на студентите;
- Във всички разгледани групи общата мотивация за участие в процеса на самоподготовка не е на достатъчно ниво. Заплахата от ниски оценки и въвеждането на по-строги срокове не довежда до подобрение. Позитивното отношение и предоставянето на нови възможности водят до значително по-добри резултати;
- Разработените диалогово-обучаващи програми за програмирано обучение не успяват да предизвикат достатъчен интерес дори при мотивираните студенти. Интегрираните уеб-базирани ресурси получават по-голямо внимание от страна на студентите спрямо софтуерните продукти, които изискват инсталиране.

Като *основни изводи за бъдещи научни изследвания в същата сфера* следва да се приемат:

- Интерактивните методи на обучение по време на семинарни упражнения водят до значителен положителен ефект при добре мотивираните студенти, но имат слабо въздействие върху тези с прекалено ниска мотивация;
- Уеб-базираните софтуерни продукти са по-популярни сред студентите и следва разработчиците на софтуер да се фокусират върху производството на такива;
- Уеб 2.0 обучението е ефективно само при добре мотивирани студенти. При слабо мотивирани студенти то се изразжда в стандартно уеб-базирано обучение;
- Технологиите за въвеждане на математически текст в уеб форми имат нужда от още по-активно развитие, защото на този етап са далеч от задоволяване на нуждите на електронното обучение по математика;
- Изследователите, които използват технологии за електронно обучение в своите експерименти, би следвало да предвидят интеграция на учебните си ресурси със система за електронно обучение (LCMS).

Основните причини за отхвърлянето на работната хипотеза и за липсата на цялостен позитивен резултат от организационния модел в дисертацията бяха главно множеството отсъствия и липсата на интерес към учебния предмет от по-голямата част от обучаемите. Това беше особено силно изразено при педагогическите специалности, в които обикновено се записват от студенти с по-слаби оценки по математика от дипломите си за средно образование и от кандидат-студентските изпити. Видно беше, че студентите изпитват затруднения не само при решаване на задачи по Линейна алгебра, но понякога дори и при извършване на по-прости аритметични действия. Друго съществено наблюдение е, че студентите засилваха своя интерес, когато им бяха демонстрирани междупредметните връзки на Линеината алгебра с предмети като Аналитична геометрия и Увод в програмирането, както и когато им бяха показвани практически ориентирани задачи от други сфери. Въпреки това мнението на автора е, че мнозинството от студентите не успяха да изградят цялостна визия за важността на учебния предмет и мястото му в учебната програма. По субективно мнение на автора при голяма част от студентите липсваше дори представа какво биха могли да получат като професионални компетенции от специалността, която изучават, като цяло.

Поради изложените причини авторът смята, че организационният модел не успя да привлече студентите с по-слаба предварителна мотивация в активно участие по време на семинарните упражнения и в процеса на самоподготовка поради две основни причини: ниското равнище на знания и умения по математика от средното образование, от една страна, и липсата на достатъчна информираност за важността на това да бъде изучаван всеки един учебен предмет от учебната им програма, от друга. Авторът смята, че организационният модел би имал значително по-добър успех, ако студентите имат по-ясна предварителна представа за полезността на знанията, които ще получат – не само от конкретния учебен предмет (Линейна алгебра), но и от обучението във висшето училище като цяло. Това би следвало да изостри вниманието на студентите към междупредметните връзки и би предотвратило негативната тенденция за това „по-

трудните“ учебни предмети (каквото се оказва, че на практика е и Линейна алгебра) да бъдат пренебрегвани от тях. Авторът на дисертационния труд и неговите научни ръководители предлагат подобен ефект да бъде потърсен чрез провеждане на курс от типа „Въведение в специалността“, в който опитни преподаватели да демонстрират по атрактивен начин цялостната визия на учебната програма и да изтъкват важността на всеки един учебен предмет от нея. Успешното провеждане на такъв курс би засилило мотивацията на студентите за участие в обучението като цяло и би било от полза не само за организационния модел от представеното в дисертацията изследване, но и при всички други организационни модели.

Допълнително, особено в педагогическите специалности, няма да бъде излишно да бъдат организирани и курсове за опресняване на знанията по Математика от курса на средното образование за студентите от първи курс, които са били приети с по-нисък от средния кандидат-студентски бал. Предложените промени, в комбинация с основните идеи, изложени в дисертационния труд, са представени на диаграма 3.



Диаграма 3. Предложение за промяна в общия организационен модел

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

- [1] **Александров Б., Каспарян А., Левченко Д.**, „Сборник по линейна алгебра и аналитична геометрия“, Софтех, **1999 г.**
- [2] **Андреев М.**, „Процесът на обучение – дидактика“, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, **1996 г.**
- [3] **Андреев М., Цветанова-Чурукова Л., Тодорина Д.**, „Дидактика“, Университетско издателство „Неофит Рилски“, **2000 г.**
- [4] **Балкански П.**, „Кейсовият метод – ефективно средство за интерактивното обучение на студентите по мениджмънт“, Интерактивните методи в съвременното образование, стр. 42-61, „Санин - Н и Н“ ООД, Благоевград, **2010 г.**
- [5] **Бижков Г., Краевски В.**, „Методология и методи на педагогическите изследвания“, Университетско издателство „Св.Климент Охридски“, София, **2007 г.**
- [6] **Бижков Г., Краевски В.**, „Основни методологически изисквания към дисертационните изследвания и типични грешки при тяхната реализация“, сборник „Теория и методология на обучението по естествени науки и математика“, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2009 г.**
- [7] **Боев Т.**, интернет ресурси свързани с избираем учебен предмет „Увод в молекулярната биоматематика“, <http://debian.fmi.uni-sofia.bg/~boev/> - последно посетена на 04.04.2012 г.
- [8] **Борисов А., Кацарска М.**, „Ръководство за решаване на задачи по линейна алгебра и аналитична геометрия“, университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **1997 г.**
- [9] **Борисов А., Гюдженев И., Димитрова И.**, „Линейна Алгебра“, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2009 г.**
- [10] **Вірченко Н.**, „Выбрани питання методики вищої математики“, Киев, **2003 г.**
- [11] **Виготски Л.** – събрани научни трудове, <http://www.marxists.org/archive/vygotsky/>, “Mind in Society”, Harvard University Press, **1978 г.**, последно посетен на 30.11.2012 г.
- [12] **Въндев Д.**, „Записки по приложна статистика 1“, Електронен учебник за курса „Приложна статистика“ във Факултет по математика и информатика на Софийски университет „Св. Климент Охридски“, **2003 г.**
- [13] **Върбанова-Денчева К.**, „Интегрирана среда за електронно обучение – концепция и съвременно състояние в България (примерът на Унибит)“, V-та национална конференция „Образованието в информационното общество“, Пловдив, **2012 г.**
- [14] **Ганчев И.**, „Методика на обучението по математика (8-11 клас, I част)“, Модул, София, **1998 г.**
- [15] **Ганчев И.**, Основни учебни дейности в урока по математика, ИФ “МОДУЛ-96”, София, **1999.**
- [16] **Ганчев И.**, „Математиката в системата на научните предмети и практиката“, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2007 г.**
- [17] **Ганчев И.**, „Препоръчителни идеи за разработване и за рецензиране на дисертации, хабилитационни трудове, доцентури и професури по научната специалност 05.07.03“, сборник „Теория и методология на обучението по естествени науки и математика“, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2009 г.**
- [18] **Ганчев И., Кучинов Й.** „Диалогови обучаващи програми – същност, ръководни идеи, принципи и етапи на разработването им“, сп. “Обучението по математика”, 2, 1-8, **1987.**

- [19] **Ганчев И., Кучинов Й.** “Персоналният компютър като средство за повишаване ефективността на обучението по математика в средното училище”, сп. “Обучението по математика”, 3, 9-12, **1987**.
- [20] **Ганчев И., Ю. Нинова, В. Никова,** „Методика на обучението по математика (обща част)“, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2002 г.**
- [21] **Генджова А.,** „Мисловни умения на високо и ниско ниво, заложи в български и канадски учебни програми“, Chemistry: Bulgarian Journal of Science Education, Volume 21, Number 1, **2012 г.**
- [22] **Гибс Г., Хейбшоу С., Хейбшоу Т.,** „53 интересни неща, които можете да правите по време на лекциите си“, Темпус София, **1997 г.**
- [23] **Гроздев С.,** „Математика за икономисти“, Издателство на ВУЗФ, **2010 г.**
- [24] **Гюдженев И.,** „Лекциите и семинарните упражнения по математика във висшите училища като системи от дейности“, Математика и математическо образование СМБ, София, Издателство на БАН, стр. 115-123, **2006 г.**
- [25] **Гюдженев И.,** „Методиките на обучението във висшите училища – необходимост и възможност“, университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2007 г.**
- [26] **Гюрова В.,** „Интерактивни методи и мотивацията на студентите за учене – в диалог с Фил Рейс“, Интерактивните методи в съвременното образование, стр. 33-41, „Санин - Н и Н“ ООД, Благоевград, **2010 г.**
- [27] **Дичева Д.,** „Интелигентни системи за обучение“, Tempus Jen 1497, Софттех, София, ISBN 954-8495-07-4, **1997 г.**
- [28] **Доневска С., Трендафилов И.,** „Линейна алгебра и Аналитична геометрия“, Издателство „Техника“, София, **1994 г.**
- [29] **Дончев Д.,** „Интерактивен обучителен софтуер по избрани теми от Линейна алгебра“, дипломна работа за бакалавър за специалност КСТ, ФКСУ към Технически университет – София, дипломен ръководител ас. Филип Петров, **2012 г.**
- [30] **Дурева Д.,** „Проблеми на методиката на обучение по информатика и информационни технологии“, Университетско издателство „Неофит Рилски“, **2003 г.**
- [31] **Дурева Д.,** „Теориите за стиловете на учене и електронното обучение“, Национален семинар за електронно обучение, проект ВУ МИ-111/2006, НФ „Научни изследвания“, МОН, **2007 г.**
- [32] **Дурева Д.,** „Интерактивните методи и технологии на електронното обучение – една реализация в смесен (blended) модел на обучение“, Интерактивните методи в съвременното образование, стр. 96-100, „Санин - Н и Н“ ООД, Благоевград, **2010 г.**
- [33] **Дурева Д., Тупаров Г.,** „Стиловете на учене и електронно обучение“, сборник „Науката, образованието и културата през 21 век“, Благоевград, **2007**
- [34] **Дурева Д., Тупаров Г., Атанасов А.,** „Модул за изследване стиловете на учене“, Математика и математическо образование, София, **2008**
- [35] **Иванов И.,** „Стилове на познание и учене. Теории. Диагностика. Етнически и полови вариации в България“, Университетско издателство “Епископ Константин Преславски”, ISBN 954-577-207-7, **2004 г.**
- [36] **Йорданов Й, Черногорова Т., Ракидзи В.,** „Математика за студенти по икономика и управление - част първа“, Университетско издателство „Св. Климент Охридски, **2012 г.**
- [37] **Исуфов Р.,** “Компютърни диалогово-обучаващи програми”, дипломна работа, ВТУ, **1999**.
- [38] **Исуфов Р.,** “Обучаваща програма по темата ‘форматиране на клетка в електронна таблица’ ”, стр. 502-507, Международна научно-практическа конференция

- "Предизвикателствата на информационното общество пред статистиката и математиката - XXI век ", Свищов, 16-18 октомври, **2003**.
- [39] **Исуфов Р.**, "Един начин за рационално използване на компютър в обучението по математика", доклади от XXXIII Пролетна конференция на СМБ, стр. 343-348, Боровец, 1-4 април, **2004**.
- [40] **Каракашева Л.**, „Съвременен модел на семинарни упражнения, осигуряващ повишаване ефективността на обучението по математически анализ“, автореферат на дисертация, Благоевград, **2011 г.**
- [41] **Каракашева Л.**, „Съвременен модел на семинарни упражнения, осигуряващ повишаване ефективността на обучението по математически анализ“, Четиридесет и първа пролетна конференция на Съюз на математиците в България, Боровец, 9-12 април, **2012 г.**
- [42] **Константинов М.**, „Елементи на линейната алгебра: Вектори и матрици“, Университет по архитектура, строителство и геодезия, **2000 г.**
- [43] **Константинов М., Тодоров В., Пелова Г., Бонева Ю.**, „Използване на системата MathLab в техническите университети“, Proceedings of the Thirty Ninth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Албена, Април 6-10, **2010 г.**
- [44] **Кучинов Й., Ганчев И.** "Обучението с компютри – необходимост възможности и състояние", сп. "Обучението по математика", 4, 5-10, **1986**.
- [45] **Кучинов Й., Ганчев И.** "Обучението с компютри – проблеми, тенденции и перспективи", сп. "Обучението по математика", 4, 1-6, **1987**.
- [46] **Лечева Г.**, „Мотивацията – гаранция за позитивното отношение към учебния процес“, Научни трудове на Русенския университет, том 48, серия 10, **2009 г.**
- [47] **Лечева Г.**, „Стиловете на учене като педагогическа компетентност“, Научни трудове на русенския университет, том 48, серия 6.2, **2009 г.**
- [48] **Мирчев И.**, „Технологичен модел в обучението по математика“, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2006 г.**
- [49] **Николов П., Георгиев Л., Мадолев В.**, „Психология на университетското обучение“, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2007 г.**
- [50] **Паев К.**, „Активни методи и форми на обучение при работата със студентите по история“, Известия на катедра „Българска история и археология“ и катедра „Обща история“ – ЮЗУ „Неофит Рилски“, Благоевград, 1, **2003 г.**
- [51] **Петров Г., Петрова-Денева А., Мартинов Н., Димовски И.**, „Математика – ръководство за математическите школи“, ДПК „Димитър Благоев“, София, **1966 г.**
- [52] **Петров Ф.**, "Среда за разработване на диалогово-обучаващ софтуер", дипломна работа, СУ „Св. Климент Охридски“, Факултет по Математика и Информатика, **2008**.
- [53] **Петров Ф.** – „Уеб 2.0 обучение по математика“, Синергетика и рефлексия в обучението по математика, Университетско издателство "Паисий Хилендарски", стр. 445-452, ISBN 978-954-423-621-2, Пловдив, **2010 г.**
- [54] **Петров Ф.** – "Технологии за въвеждане и изобразяване на математически формули в Уеб 2.0 приложения", Образованието в информационното общество, Асоциация "Развитие на информационното общество" и "Институт по математика и информатика" към БАН, стр. 200-209, ISSN 13140752, Пловдив, **2011 г.**
- [55] **Петров Ф.; Исуфов Р.** – „Интернет базирана среда за разработка на диалогово-обучаващи програми по математика“. Математика и математическо образование СМБ, София, Издателство на БАН, стр. 312-319, ISSN 1313-3330, **2009 г.**
- [56] **Петров Ф.; Дурева-Тупарова Д.** – "Практически пример на технологични средства за реализиране на Уеб 2.0 обучение по математика", Математика и информатика – научно-методическо списание, година LVI, кн. 3, стр. 258-266, ISSN 1310-2230, **2013 г.**

- [57] **Попков Т.**, „Методът на конкретните ситуации (case study) в подготовката на педагози“, Интерактивните методи в съвременното образование, стр. 83-90, „Санин - Н и Н“ ООД, Благоевград, **2010 г.**
- [58] **Радев П.**, „Интерактивни методи в обучението“, Интерактивните методи в съвременното образование, стр. 11-32, „Санин - Н и Н“ ООД, Благоевград, **2010 г.**
- [59] **Рейс Ф., Браун С.**, „500 съвета към преподавателя“, Темпус, София, **1995 г.**
- [60] **Стефанов М.**, „Софтуер за електронно обучение на тема ‘Евклидови и унитарни пространства’ от Линейна Алгебра“, дипломна работа за бакалавър за специалност КСТ, ФКСУ към Технически университет – София, дипломен ръководител ас. Филип Петров, **2013 г.**
- [61] **Стоичков В.**, „Интерактивен софтуер за обучение по тема „Квадратични форми“ от Линейната алгебра“, дипломна работа за бакалавър за специалност КСТ, ФКСУ към Технически университет – София, дипломен ръководител ас. Филип Петров, **2012 г.**
- [62] **Тодорина Д.**, „Култура на педагогическото общуване“, университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2005 г.**
- [63] **Тодорина Д.**, „Създаване на интерактивна образователна среда (теоретични и приложни аспекти)“, Интерактивните методи в съвременното образование, стр. 62-92, „Санин - Н и Н“ ООД, Благоевград, **2010 г.**
- [64] **Тодорина Д.** „Форми на обучение“, издателство „Санин – Н и Н“ ООД Благоевград, **2011 г.**
- [65] **Тодорина Д., Соловьева С., Марулевска К., и др.**, „Интерактивни методи в средното и висшето училище – част 1“, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2012 г.**
- [66] **Тотков Г., Соколова М., Донева Р.**, „Организация и провеждане на тест в среда за електронно обучение ReU 2.0“, 34-та Конференция на СМБ, **2005 г.**
- [67] **Тотков Г., Денев Д., Денева Р.** „BEST: Български образователен портал за е-проекти“, Втора Национална Конференция по Електронно Обучение във Висшето Образование, 14-16 септември, **2006 г.**
- [68] **Трифонов Т.**, „Изграждане на адаптивна функционалност, базирана на стилове за учене, в системите за електронно обучение“, дисертационен труд за присъждане на образователно и научна степен „доктор“, Технически университет – София, **2013г.**
- [69] **Тупаров Г.**, „Възможности за управление на учебния процес в система за е-обучение Moodle“, сборник „Математика и математическо образование СМБ“, София, Издателство на БАН, **2009 г.**
- [70] **Тупаров Г., Дурева Д.** „Електронно обучение, Технологии и модели“, университетско издателство „Неофит Рилски“, **2008.**
- [71] **Тупарова Д.**, „Интерактивни методи и електронно обучение“, Годишник наука-образование-изкуство - том 1 част 2, Съюз на учените – Благоевград, ISBN 978-954-680-529-4, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, **2007 г.**
- [72] **Учебни материали на катедра „Алгебра“ СУ**, <http://www.fmi.uni-sofia.bg/algebra/> - последно посетен на 22.12.2012 г.
- [73] **Учебни материали на УАСГ**, <http://w3.uacg.bg/books/index.html>, актуализация от **2009 г.** - последно посетен на 08.08.2013 г.
- [74] **Фестингер Л.**, „Теория когнитивного диссонанса“, СПб. Ювента, **1999 г.**
- [75] **Филипова Н.**, „Предпоставки за ефективност на интерактивните методи на обучение във висшето училище“, Интерактивните методи в съвременното образование, стр. 91-95, „Санин - Н и Н“ ООД, Благоевград, **2010 г.**
- [76] **Шойкова Е., Денишев Д.**, „Архитектура за еОбучение с интегриран Microsoft Class Server“, Национален семинар по електронно обучение „Софтуерни платформи за електронно обучение“, София, **2005 г.**

- [77] **Юруков Б.**, „Технология за обучение по математическо оптимизиране в средното училище“, дисертация, Университетско издателство „Неофит Рилски“, Благоевград, 2001 г.
- [78] **Aggarwal A.**, “Web Based Education: Learning from Experience”, Informational Science Publishing, ISBN 978-159-140-102-5, 2003.
- [79] **Ajjan H., Hartshorne R.**, “Investigating Faculty Decisions to Adopt Web 2.0 Technologies: Theory and Empirical Tests”, Internet and Higher Education 11, p. 71–80, 2008.
- [80] **Anderson L., Krathwohl D., Airasian P., Cruikshank K., Mayer R., Pintrich P., Rath J., Wittrock M.**, “A Taxonomy for Learning, Teaching”, Boston: Allyn & Bacon, 2000.
- [81] **Arganbright D.**, “Innovative Uses of Excel in Linear Algebra”, Asian Technology Conference in Mathematics, 2011.
- [82] **Aronson E., Blaney N., Stephan C., Sikes J., Snapp M.**, “The Jigsaw Classroom”, Sage, Beverley Hills, CA, 1978
- [83] **Aydin S.**, “On Linear Algebra Education”, Inonu University Journal of the Faculty of Education, Volume. 10, Issue. 1, pp. 93-105, ISSN 1300-2899, 2009.
- [84] **Beezer R.**, “Teaching an Introductory Linear Algebra Course”, Project NExT@MathFest, 2012.
- [85] **Beezer R.**, A First Course in Linear Algebra 3.01: <http://linear.ups.edu/html/fcla.html>, 2012 - последно посетен на 26.12.2012 г.
- [86] **Bernman A.**, “Principles and Tools in Teaching Linear Algebra”, The 16th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS) , Pisa, Italy 2010
- [87] **Bloom, B., Engelhart, M., Furst, E., Hill, W., Krathwohl, D.**, “Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals”, Handbook I: Cognitive Domain New York, Longmans, Green, 1956.
- [88] **Bogacki P.**, **Linear Algebra Toolkit**, <http://www.math.odu.edu/~bogacki/lat/>, 2008 - последно посетен на 21.08.2012 г.
- [89] **Bontchev B., Iliev T.**, “ARCADE – Web-Based Authoring and Delivery Platform for Distance Education”, 1st Balkan conference in informatics, Thessaloniki, Greece, 2003.
- [90] **Bradford P., Porciello M., Balkon N., Backus D.**, “The Blackboard Learning System”, The Journal of Educational Technology Systems 35, pages 301-314, 2007.
- [91] **Brown J. S., Moran T. P., Williams M. D.**, “The Semantics of Procedures: A Cognitive Basis for Training Procedural Skills for Complex Maintenance (CIS Working Paper)”, Palo Alto, CA: Xerox Palo Alto Research Center, 1982.
- [92] **Cashin W. E.**, “Improving Lectures”, Idea Paper No. 14, Center for Faculty Evalyation & Development, Kansas State University, 1985.
- [93] **Cheever E.**, “Using Eigenvalues and Eigenvectors to Study Vibrations”, <http://lpsa.swarthmore.edu/MtrxVibe/Vibrations.html>, 2005 - последно посетен на 11.08.2013 г.
- [94] **CodeCogs Equation Editor**, <http://www.codecogs.com/latex/eqneditor.php> - последно посетен на 03.02.2013г.
- [95] **Coffield F., Moseley D., Hall E., Ecclestone K.**, “Should We Be Using Learning Styles? What Research Has to Say to Practice”, Learning and Skills Research Centre (Great Britain), 2004.
- [96] **Cowen C.**, “On the Centrality of Linear Algebra in the Curriculum”, The Deborah and Franklin Teper Haimo Award for Distinguished College or University Teaching at the Joint Meetings, Jan. 10, San Diego, California, 1997.
- [97] **Cowen C.**, “Use of Technology in Teaching the Mathematics of Linear Algebra”, The Joint Mathematics Meetings, San Francisco, 2009.

- [98] **Cunniff C., Aldous M., Grossman M., Keim S., Lake D., Lippe J., Vanderah T., Woods G., Wright S.**, “The Interactive Lecture – an Instructor’s Manual”, University of Arizona, College of Medicine, **2009**, <http://arizonamedicine.arizona.edu/curriculum/facdev/instruction.cfm> - последно посетен на 16.12.2012 г.
- [99] **Dalsgaard C.**, “Social Software: E-Learning beyond Learning Management Systems”, European Journal of Open, Distance and Elearning (eurodl.org), **2006**.
- [100] **Day J., Kalman D.**, “Teaching Linear Algebra: What are the Questions”, **1999**, <http://www1.american.edu/academic.depts/cas/mathstat/People/kalman/pdffiles/questions.pdf>, последно посетен на 16.08.2012 г.
- [101] **Day J., Kalman D.**, “Teaching Linear Algebra: Issues and Resources”, College Mathematics Journal, Vol. 32, No. 3, pp. 162 – 168, **2001**.
- [102] **Denton T., Waldron A.**, “Linear Algebra in Twenty Five Lectures”, учебник – бесплатно онлайн издание на Университета на Калифорния, **2012 г.**
- [103] **Dicovic L.**, “Interactive Learning and Teaching of Linear Algebra by Web Technologies: Some Examples”, The Teaching of Mathematics, Vol. X, 2, pp.109-116, **2007**.
- [104] **Divitini M., Haugalokken O., Morken E. M.**, “Blog to Support Learning in the Field: Lessons Learned From a Fiasco”, Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT), **2005**.
- [105] **Dorier J.**, “On the Teaching of Linear Algebra”, Mathematics Education Library, Vol. 23 ISBN: 978-0-7923-6539-6, **2000**.
- [106] **Dorier J.**, “Teaching Linear Algebra at University”, ICM 2002, Vol. III, 1–3, **2002**.
- [107] **DragMath**, <http://www.dragmath.bham.ac.uk> - последно посетен на 02.02.2013г.
- [108] **Duk Sun-Kim, Sang-Guu Lee**, “MathML and Java Implementation in Linear Algebra”, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Volume 1, Number 1, ISSN 1933-2823, **2008**
- [109] **Ebner M., Lienhardt C., Rohs M., Meyer I.**, “Microblogs in Higher Education – a Chance to Facilitate Informal and Process-Oriented Learning?”, Computers & Education 55, p. 92-100, **2010**.
- [110] **Esla**, <http://code.google.com/p/esla/>, **2009** - последно достъпен на 17.08.2012 г.
- [111] **Esteban-Gil A., Fernández-Breis J.T., Castellanos-Nieves D., Valencia-García R., García-Sánchez F.**, “Semantic Enrichment of SCORM Metadata for Efficient Management of Educative Contents”, World Conference on Educational Sciences (WCES), **2009**.
- [112] **Felder R.M., Silverman L.K.**, “Learning and Teaching Styles in Engineering Education”, Engineering Education, 78(7), 674-681, **1988**.
- [113] **Felder R.M.**, “Reaching the Second Tier: Learning and Teaching Styles in College Science Education”, J. College Science Teaching, 23(5), 286-290, **1993**.
- [114] **Gainsburg J.**, “The Mathematical Modeling of Structural Engineers”, Mathematical Thinking and Learning, 8(1), 3-36, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., **2006**.
- [115] **Ganchev I., Gyudzhenov I., Karakasheva L.**, “Matrix Approach to Solving Problems in Connection with the Teaching Content in Higher Schools”, Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education, Plovdiv, **2009**.
- [116] **Gantchev I., Grozdev S.**, “On Two Fundamental Approaches to the Development of Scientific Knowledge and Their Implementation in Didactics of Mathematics”, Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education, Plovdiv, **2009**.
- [117] **Gibbs G., Simpson C.**, “Conditions Under Which Assessment Supports Students Learning”, Learning and Teaching in Higher Education, Issue 1, **2004**.

- [118] **GNU Octave Linear Algebra 2.2.0**, <http://octave.sourceforge.net/linear-algebra/>, 2012, - последно посетен на 25.08.2012г.
- [119] **GNU Octave 3.6.2**, <http://www.gnu.org/software/octave/>, 2012, - последно посетен на 25.08.2012г.
- [120] **Gonzalez-Barbone V., Anido-Rifon L.**, “Creating the First SCORM Object”, *Computers & Education* 51, p. 1634–1647, 2008.
- [121] **Gonzalez-Barbone V., Anido-Rifon L.**, “From SCORM to Common Cartridge: a Step Forward”, *Computers & Education* 54, p. 88–102, 2010.
- [122] **Governor J., Hinchcliffe D., Nickull D.** “Web 2.0 Architectures”, O’Reilly 2009.
- [123] **Graf S., Rita S., Leo T., Kinshuk**, “In-Depth Analysis of the Felder-Silverman Learning Style Dimensions”, *Journal of Research on Technology of Education*, 40(1), 2007.
- [124] **Halic O., Lee D., Paulus T., Spence M.**, “To Blog or Not to Blog: Student Perceptions of Blog Effectiveness for Learning in a College-Level Course”, *Internet and Higher Education* 13, p. 206-213, 2010.
- [125] **Herman E., Pepe M.**, “Visual linear algebra”, John Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-471-68299-3, 2005.
- [126] **Hijon-Neira R., Velazquez-Iturbide A.**, “Improving the Analysis of Students' Participation & Collaboration in Moodle Forums”, *Advanced Learning*, chapter 18, ISBN 978-953-307-010-0, 2009.
- [127] **Hill D.**, “Teaching Introductory Linear Algebra Incorporating Matlab”, *SIAM Conference on Applied Linear Algebra talk*, 2009.
- [128] **Hong L., Lei J., Shu-hong G., Bruce C.**, “The Relationship of Kolb Learning Styles, Online Learning Behaviors and Learning Outcomes”, *Educational Technology & Society*, 10 (4), 187-196, 2007.
- [129] **Hristov Ts.**, “A Model of a New E-Learning Shell Authoring Tool”, *International Conference on Computer Systems and Technologies - CompSysTech*, 2006.
- [130] **Isofov R.; Petrov Ph.**– „First Steps in Constructing a Theory of Educational Dialogue Computer Programs“, *MASSEE International Congress on Mathematics MICOM, Proceedings Education*, pages from 115 to 122, ISBN 978-9989-646-40-9, Ohrid, 2009.
- [131] **ForumMatrix** - **Compare Them All**, <http://www.forummatrix.org/compare/bbPress+miniBB+phpBB+SMF+vBulletin>, 2009 – последно посетен на 03.02.2013 г.
- [132] **Idris I. M.**, “Toward a Right Way to Teach Linear Algebra”, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, ISSN 1473 – 0111, 2005.
- [133] **Jaworski B., Treffert-Thomas S., Bartsch T.**, “Linear Algebra with a Didactical Focus”, *NAW* 5/12 nr. 4 December, 2011.
- [134] **Kim H. N.**, “The Phenomenon of Blogs and Theoretical Model of Blog Use in Educational Contexts”, *Computers & Education* 51, p. 1342–1352, 2008.
- [135] **Klapsinou A., Gray E.**, “The Intricate Balance Between Abstract and Concrete in Linear Algebra”, *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 153-160)*, Haifa, Israel, 1999.
- [136] **Kurt B., Leise T.**, “The \$25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google”, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Volume 48, Issue 3, Pages 569-581, ISSN: 0036-1445, 2006.
- [137] **Lay D.**, „Linear Algebra and Its Applications“, Fourth Edition, Addison Wesley, 2011.
- [138] **Leithwood K., Seashore Louis K., Anderson S., Wahlstrom K.**, “How Leadership Influences Student Learning”, *Center for Applied Research and Educational Improvement, Ontario Institute for Studies in Education*, September 2004.

- [139] **Leon S., Herman E., Herman G.**, “Atlas: Computer Exercises for Linear Algebra”, Prentice Hall, Upper Saddle River, ISBN 978-0132702737, **1996**.
- [140] **Lewis J.**, “Project Leadership”, Second Edition, McGraw Hill, ISBN 0-07-138867-2, **2003**.
- [141] **Liao Y.W., She H.C.**, “Enhancing Eight Grade Students' Scientific Conceptual Change and Scientific Reasoning through a Web-Based Learning Program”, Educational Technology & Society, 12 (4), 228–240, **2009**.
- [142] **Lin H. T., Yuan, S. M.**, “Taking Blog as a Platform of Learning Reflective Journal”, ICWL, p. 38-47, **2006**.
- [143] **Lyryx**, <http://www.lyryx.com/linearalgebra>, **2002** - последно посетен на 04.10.2012 г.
- [144] **March T.**, “Working for the Web Education”, Classroom Connect Conference, Anaheim, November 20th **1996**.
- [145] **MathJax 2.0**, <http://www.mathjax.org>, **2012** – последно посетен на 03.02.2013 г.
- [146] **Mathway Algebra**, <http://www.mathway.com/problem.aspx?p=algebra>, **2012** – последно посетен на 15.08.2012 г.
- [147] **MathXpert 4.16**, <http://www.helpwithmath.com/>, **2004** - последно посетен на 04.10.2012 г.
- [148] **Matrix Reshish**, <http://matrix.reshish.com/>, **2012** - последно посетен на 29.08.2012 г.
- [149] **MatrixCalc**, <http://matrixcalc.org>, **2012** - последно посетен на 28.08.2012 г.
- [150] **Maxima 5.28.0**, <http://maxima.sourceforge.net/>, **2012** - последно посетен на 05.10.2012 г.
- [151] **Mazur E.**, "Peer Instruction: A User's Manual", Prentice Hall, ISBN 0-13-565441-6 , **1997**.
- [152] **Meyer K. A.**, “A Comparison of Web 2.0 Tools in a Doctoral Course”, Internet and Higher Education 13, p. 226–232, **2010**.
- [153] **Mileva N., Stoyanova S., Yovcheva T., Gil M., Mediano C., Bastiaens T., Stoyanov S., Mathieu N., Tzanova S.**, “Web-Based Environment for Design, Development and Learn with Performance-Centered Educational Systems”, Sixth International Conference of Computer Based Learning in Science, Cyprus, **2003**.
- [154] **Miyazoe T., Anderson T.**, “Learning Outcomes and Students’ Perceptions of Online Writing: Simultaneous Implementation of a Forum, Blog and Wiki in an EFL Blended Learning Setting”, System – an International Journal of Education Technology and Applied Linguistics, ISSN 0346-251X, Volume 38, Issue 2, June, **2010**.
- [155] **Mkaz Matric Calculator**, http://mkaz.com/math/linear_algebra/matrix_calculator.html, **1997** - последно посетен на 30.08.2012 г.
- [156] **Moore M.**, “Handbook of distance education”, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., **2003**
- [157] **Morgan J. JRNMC**, <http://www.math.uh.edu/~jmorgan/Matrix/>, **2008** - последно посетен на 30.08.2012 г.
- [158] **Musser J., O'Reilly T.**, “Web 2.0 Principles and Best Practices (O'Reilly Radar)”, O'Reilly Media, ISBN 978-0596527693, **2006**
- [159] **National Research Council**, “Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education”, Washington, DC: National Academy Press, **1989**.
- [160] **Nguyen M.**, “Linear Algebra with Maxima”, published in the University of Western Australia (UWA) Maths Society Student Magazine AfterMath, issue 4, pp.3–7, **2008**.
- [161] **Opaschowski H.**, “Methoden der Animation”, Klinkhardt Bad Heilbrunn, **1981**.

- [162] **Pasman W., Jansen F. W.**, “E-Learning Tool voor Lineaire Algebra”. Technical Report, Delft University of Technology, February, **2005**. Преведено на английски език на електронен адрес <http://graphics.tudelft.nl/~fwj/LA-web.htm> - последно посетен на 04.10.2012 г.
- [163] **Pasman W.**, “Electronic Linear Algebra Trainer: Towards a System Configuration”. Technical Report, Delft University of Technology, **2005**.
- [164] **Pasman W.**, “Linear Algebra Experiment”. Technical Report, Delft University of Technology, June 26, **2006**.
- [165] **Petrov Ph.; Popov A.; Isufov R.** – “Standardization of the Development of Educational Dialogue Computer Programs”, Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education, pages from 99 to 111, ISBN 978-9963-9277-9-1, Plovdiv, **2009**.
- [166] **Petrov Ph.; Gyudzhenov I.; Tuparova D.** – „Adapting Interactive Methods in the Teaching of Linear Algebra – Results from Pilot Studies“, Procedia-Social and Behavioural Sciences Journal, ISSN: 1877-0428, **2014**.
- [167] **PHPBB 3.0.11**, <http://www.phpbb.com/>, **2012** - последно посетен на 03.02.2013г.
- [168] **Piepmeyer E.**, “Use of Conceptests in a Large Lecture Course to Provide Active Student Involvement and Peer Teaching”, American Journal of Pharmaceutical Education Vol. 62, Fall **1998**.
- [169] **Purwanti D., Pustari M.**, “The Comparison of Using Microsoft Mathematics and Traditional Teaching on Students’ Achievement – Teaching Mathematics in Senior High School”, Proceedings of the Global Summit of Education, Malaysia, **2013**.
- [170] **Rahnev A., Rahneva O., Monev S.**, “Web 2.0 architecture on DeTC on base of Marfik and JST”, International Anniversary Science Conference “Science, Education and Time as Concern”, Smolian, **2007**.
- [171] **Raj L. L.**, "Focusing Learning on Concepts of Introductory Linear Algebra Using MAPLE Interactive Tutors", ISBN 978-0-9821164-3-2, ISSN 1940-4204, Asian Technology Conference in Mathematics, Turkey, **2011**
- [172] **Rechneronline – Calculators for Linear Algebra**, <http://rechneronline.de/linear-algebra/>, **2004** - последно посетен на 30.08.2012 г.
- [173] **Richards D.**, “A Social Software/Web 2.0 Approach to Collaborative Knowledge Engineering”, Information Sciences 179, p. 2515–2523, **2009**.
- [174] **Richmond A., Cummings Rh.**, “Implementing Kolb’s Learning Styles Into Online Distance Education”, International Journal of Technology in Teaching and Learning, 1(1), 45-54, **2005**.
- [175] **Rick J., Lamberty K. K.**, “Medium-Based Design: Extending a Medium to Create an Exploratory Learning Environment”, Interactive Learning Environments, vol. 13 n3, p. 179-212, December, **2005**.
- [176] **Ryan M., Martens G.**, “Planning a College Course: A Guidebook for the Graduate Teaching Assistant”, Ann Arbor: University of Michigan, National Center for Research to Improve Postsecondary Teaching and Learning, **1989**.
- [177] **Sage 5.2**, <http://www.sagemath.org/>, **2012** - последно посетен на 24.08.2012 г.
- [178] **Sang-Guu L.**, “Linear Algebra with Sage-Math and the Smartphone”, 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea, **2012**
- [179] **Sang-Guu L., Sun-Kim D.**, “Linear Algebra BL class with RPG and Mobile Sage”, Join Mathematics Meetings, San Francisco, **2010**
- [180] **Schoenfeld A. H.**, “Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics”, In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan, **1992**.

- [181] **Shenquan L.**, “Using Pictures to Teach Linear Algebra”, The China Papers, Issue 2, July **2003**.
- [182] **Shibberu Y.**, “What is the Role of Mathematical Modeling in Core Mathematics Courses for Engineering Students?”, Engineering Education at the Crossroads – Putting Dialogue into Practice, Asee IL/IN Section Conference, April 3-5, **2008**.
- [183] **SMF 2.0.3**, <http://www.simplemachines.org/>, **2012** - последно посетен на 03.02.2013 г.
- [184] **SMF** **StickyTopicsOrder** **0.5**, <http://custom.simplemachines.org/mods/index.php?mod=3425>, **2012** – последно посетен на 03.02.2013 г.
- [185] **Smith A., Peck B.**, “The Teacher as the ‘Digital Perpetrator’: Implementing Web 2.0 Technology Activity as Assessment Practice for Higher Education. Innovation or Imposition?”, World Conference on Educational Sciences (WCES), **2010**.
- [186] **Soles C., Moller L.**, “Myers Briggs Type Preferences in Distance Learning Education”, IJET - International Journal of Educational Technology, **1999**.
- [187] **Solved – Linear Algebra**, http://www.bagatrix.com/linear_algebra.aspx, **2012** - последно посетен на 15.08.2012 г.
- [188] **Stiles M. J.**, “Effective Learning and the Virtual Learning Environment”, EUNIS 2000: Towards Virtual Universities: Proceedings of the European University Information System 2000 Conference Held at INFOSYSTEM 2000, Poznan, Poland, pages 171-180, **2000**.
- [189] **Strang G.**, Linear Algebra in OpenCourseWare in MIT, **2010**, <http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/> - последно посетен на 20.08.2012 г.
- [190] **Süral I.**, “Characteristics of a Sustainable Learning and Content Management System (LCMS)”, World Conference of Learning, Teaching and Administration (WCLTA), Cairo, Egypt, **2010**.
- [191] **Tuparova D., Tuparov G.**, “Didactical Issues of E-Learning Problems and Future Trends”, International Conference on Computer Systems and Technologies – CompSysTech, **2005**.
- [192] **Tuparova D., Tuparov G.**, “Learning Styles Testing in Moodle”, CompSysTech 2008, ACM International Conference Proceeding Series, Vol. 374, Proceedings of the 9th International Conference on Computer Systems and Technologies. **2008**
- [193] **Tuparova D., Tuparov G.**, “The Jigsaw Collaborative Method in Blended Learning Course Computer Games and Education – Realization in Moodle”, Conference ICL2009, Austria, September, **2009**.
- [194] **Tuparova D., Tuparov G.**, “Management of Students’ Participation in E-Learning Collaborative Activities”, World Conference on Educational Sciences (WCES), **2010**.
- [195] **Uhlig F.**, “The Role of Proof in Comprehending and Teaching Linear Algebra”, Educational Studies in Mathematics 50.3, 335–346p, **2002**.
- [196] **Uhlig F.**, “A New Unified, Balanced and Conceptual Approach to Teaching Linear Algebra”, Linear Algebra and Its Applications, Vol. 36(1), 147-159, **2003**.
- [197] **Vanderzwaag J. MCalcDos 0.3**, <http://www.angelfire.com/space/matrixcalc/>, **2004** - последно посетен на 30.08.2012 г.
- [198] **Waliullah S.**, “Didactical Problems Related to Linear Algebra”, статия, публикувана на уеб сайта на департамента по математика на Университета в Стокхолм на адрес <http://kurser.math.su.se/>, **2007**.
- [199] **Weingardt K.**, “The Role of Instructional Design and Technology in the Dissemination of Empirically Supported, Manual-Based Therapies”, Clinical Psychology: Science and Practice Volume 11, Issue 3, Pages 313–331, September, **2004**.

- [200] **Wikipedia** – **Comparison of Internet Forum Software (PHP)**, http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_Internet_forum_software_%28PHP%29 , ревизия 02 Октомври **2012**– последно посетен на 03.02.2013 г.
- [201] **Wiris 3.6**, <http://www.wiris.com/plugins/moodle>, **2012** - последно посетен на 02.02.2013г.
- [202] **WolframAlpha**, <http://www.wolframalpha.com>, **2012** - последно посетен на 30.08.2012 г.
- [203] **Wu H.**, “Computer Aided Teaching in Linear Algebra”, The China Papers, Issue 3, July **2004**.
- [204] **WXMaxima 12.09.0**, <http://andrejv.github.com/wxmaxima/>, **2012** - последно посетен на 05.10.2012 г.
- [205] **Xiaoxu H.**, “Teaching Elementary Linear Algebra Using Matlab: An initial Investigation”, The Scholarship of Teaching and Learning at EMU: vol 2, article 9, **2009**.
- [206] **Yee K.**, “Interactive Techniques”, Faculty Center of Teaching and Learning, UCF, http://www.fctl.ucf.edu/teachingandlearningresources/coursedesign/assessment/content/101_tips.pdf, **2005** - последно посетен на 24.12.2012 г.
- [207] **Yee K., Pereira J.**, “Implementing Edmodo (a free LMS) into K-12 Schools - a Case Study”, 2nd Information Fluency Conference, Orlando, FL, **2012**.

ПУБЛИКАЦИИ, СВЪРЗАНИ С ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД:

1. **Петров Ф.; Исуфов Р.** – „Интернет базирана среда за разработка на диалогово-обучаващи програми по математика“. Математика и математическо образование СМБ, София, Издателство на БАН, стр. 312-319, ISSN 1313-3330, **2009 г.**

Доклад на XXXVIII пролетна конференция на СМБ, Боровец, 1-5 април 2009 г.

2. **Petrov Ph.; Popov A.; Isufov R.** – “Standardization of the Development of Educational Dialogue Computer Programs”, Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education, pages from 99 to 111, ISBN 978-9963-9277-9-1, Plovdiv, **2009.**

Reported on the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education, Plovdiv, 22-26 April 2009.

3. **Isufov R.; Petrov Ph.** – „First Steps in Constructing a Theory of Educational Dialogue Computer Programs“, MASSEE International Congress on Mathematics MICOM, Proceedings Education, pages from 115 to 122, ISBN 978-9989-646-40-9, Ohrid, **2009.**

Reported on MASSEE International Congress on Mathematics MICOM 2009, Ohrid, Republic of Macedonia, 16 – 20 September, 2009.

4. **Петров Ф.** – „Уеб 2.0 обучение по математика“, Синергетика и рефлексия в обучението по математика, Университетско издателство “Паисий Хилендарски”, стр. 445-452, ISBN 978-954-423-621-2, Пловдив, **2010 г.**

Доклад на юбилейната международна конференция Бачиново, посветена на 60 г. на проф. Сава Гроздев, Благоевград, 10-12 септември 2010 г.

5. **Петров Ф.** – “Технологии за въвеждане и изобразяване на математически формули в Уеб 2.0 приложения”, Образованието в информационното общество, Асоциация “Развитие на информационното общество” и “Институт по математика и информатика” към БАН, стр. 200-209, ISSN 13140752, Пловдив, **2011 г.**

Доклад на Четвъртата национална конференция “Образованието в информационното общество”, Пловдив, Дом на учените, 26-27 май 2011 г.

6. **Петров Ф.; Дурева-Тупарова Д.** – “Практически пример на технологични средства за реализиране на Уеб 2.0 обучение по математика”, Математика и информатика – научно-методическо списание, година LVI, кн. 3, стр. 258-266, ISSN 1310-2230, **2013 г.**

7. **Petrov Ph.; Gyudzhenov I.; Tuparova D.** – „Adapting Interactive Methods in the Teaching of Linear Algebra – Results from Pilot Studies“, Procedia-Social and Behavioural Sciences Journal, ISSN: 1877-0428, **2014.**

Reported on 6th World Conference on Educational Sciences, Malta, February 06-09, 2014.

СПИСЪК С ФИГУРИ И ДИАГРАМИ

Диаграма 1. Обща схема на организационния модел	92
Диаграма 2. Обща схема на организационния модел	113
Диаграма 3. Предложение за промяна в общия организационен модел	181
Фигура 1. Решаване на практически проблем с научен подход	27
Фигура 2. Видове комуникация в уеб 2.0 обучението	61
Фигура 3. Дидактическа блок-схема на доп	66
Фигура 4. Логико-дидактическа блок-схема на доп	67
Фигура 5. Логико-дидактическа блок-схема на доп с елементи на оценяване	68
Фигура 6. Примерна задача с математическо моделиране	96
Фигура 7. Извличане на <code>mathml</code> и <code>tex</code> код от формула с <code>mathjax</code>	124
Фигура 8. Писане на формули в <code>codecogs equation editor</code>	126
Фигура 9. Примерен граф, показващ различни пътища на учене.....	130
Фигура 10. Примерен граф за режим на оценяване 1	131
Фигура 11. Предложение за промяна в режим на оценяване 2	132
Фигура 12. Разделяне на задача на области от подзадачи.....	133
Фигура 13. Допълнителна задача за покриване на минимум от знания.....	134
Фигура 14. Пропускане на задачи от по-добре подготвени студенти	135
Фигура 15. ДОП за задачи с матрици и операции с матрици.....	137
Фигура 16. ДОП за задачи от темата „квадратични форми“ – 1	138
Фигура 17. ДОП за задачи от темата „квадратични форми“ – 2	138
Фигура 18. ДОП за задачи от „евклидови и унитарни пространства“	139
Фигура 19. Превод на <code>matrixcalc</code> на български език	140
Фигура 20. Брой мнения по раздели за експериментална група поми/пофм 2012/2013 г.	158
Фигура 21. Брой мнения по раздели за експериментална група “информатика” 2012/2013 г.	166
Фигура 22. Предпочитания на студентите към учебен предмет от средното образование.....	173
Фигура 23. Мнение на студентите за практическата приложимост на линейна алгебра	174
Фигура 24. Мнение на студентите за междупредметните връзки	175
Фигура 25. Мнение на студентите за учебните материали в електронен вид	175
Фигура 26. Мнение на студентите за предаване на домашни работи в електронен вид	176

СПИСЪК С ТАБЛИЦИ

Таблица 1. Основни подходи по класификацията на майерс-бригс	39
Таблица 2. Избор на технология спрямо стила на учене	40
Таблица 3. Сравнение на софтуерни продукти за обучение по линейна алгебра	87
Таблица 4. Сравнение между форуми, блогове и wikis по 9 различни критерия.....	118
Таблица 5. Резултати на експериментална група ПОФМ 2011/2012 г.....	144
Таблица 6. Резултати на контролна група поми 2011/2012 г.	145
Таблица 7. Дати на регистрация на потребители от експерименти № 1 и № 2	154
Таблица 8. Резултати на експериментална група ПОМИ/ПОФМ 2012/2013 г.....	155
Таблица 9. Използвани технологии от ПОМИ/ПОФМ 2012/2013 г.	159
Таблица 10. Статистически данни за форума от експерименти 1 и 2	159
Таблица 11. Резултати на експериментална група Информатика 2012/2013 г.....	162
Таблица 12. Резултати на контролна група Информатика 2012/2013 г.	162
Таблица 13. Резултати на чуждестранни студенти в Информатика 2012/2013 г.	165
Таблица 14. Статистически данни за форума за експеримент 3	167
Таблица 15. Използвани технологии от Информатика 2012/2013 г.	167
Таблица 16. Статистически данни за форума от експеримент 4.....	169
Таблица 17. Резултати на експериментална група ктт 2012/2013 г.	171
Таблица 18. Резултати на контролна група електроника 2012/2013 г.....	172

ДЕКЛАРАЦИЯ ЗА ОРИГИНАЛНОСТ:

Декларирам, че настоящата дисертация съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изследвания (с подкрепата и съдействието на научните ми ръководители). Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в раздел „използвана литература“.

Настоящата дисертация не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис:

/Филип Петров Петров/